

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	1	7	3	2	1	3
番号	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
答	2	5	2	3	5	5
番号	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
答	3	1	4	2	3	2
番号	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
答	7	2	8	5	3	3
番号	ノ					
答	1					

$$(1) \quad y = x^2,$$

$$y' = 2x$$

(t, t^2) における接線の方程式は、

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ は $P(p, -\frac{1}{4})$ を通るから、

$$-\frac{1}{4} - t^2 = 2t(p - t)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2pt - \frac{1}{4} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ の解が、

$$t = a \text{ 或 } b$$

なので、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} a + b = 2p \\ ab = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

----- (答)

(2)(3) $Q(a, a^2)$, $R(b, b^2)$ における法線の方程式は、それぞれ、

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a) \quad \dots \textcircled{4} \quad \because a \neq 0$$

$$y - b^2 = -\frac{1}{2b}(x - b) \quad \dots \textcircled{5} \quad \because b \neq 0$$

である。よって、 S の座標は、

$\textcircled{4}$ か $\textcircled{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{4} \\ (b+a)(b-a) = \frac{(a-b)x}{2ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2ab(a+b) & \because a \neq b \\ y = a^2 + b^2 + ab + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2ab(a+b) \\ y = (a+b)^2 - ab + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (-2) \cdot 2p \cdot (-\frac{1}{4}) \\ y = (2p)^2 - (-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p \\ y = 4p^2 + \frac{3}{4} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2} \text{ の (答)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = p \\ y = 4x^2 + \frac{3}{4} \end{cases}$$

よって、求める軌跡 C は、 p が任意の実数値を取ることに注意して、

$$\underline{y = 4x^2 + \frac{3}{4}} \quad \dots \textcircled{3} \text{ の (答)}$$

$$(4) \quad y = 4x^2 + \frac{3}{4}$$

$$y' = 8x$$

初めに、 T の座標を求める。

$S(p, 4p^2 + \frac{3}{4})$ における接線の方程式は、

$$y - (4p^2 + \frac{3}{4}) = 8p(x - p) \quad \dots \textcircled{4}$$

よって、 T の座標は、

$$\textcircled{4} \text{ か } y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (\frac{p}{2} - \frac{3}{32p}, 0)$$

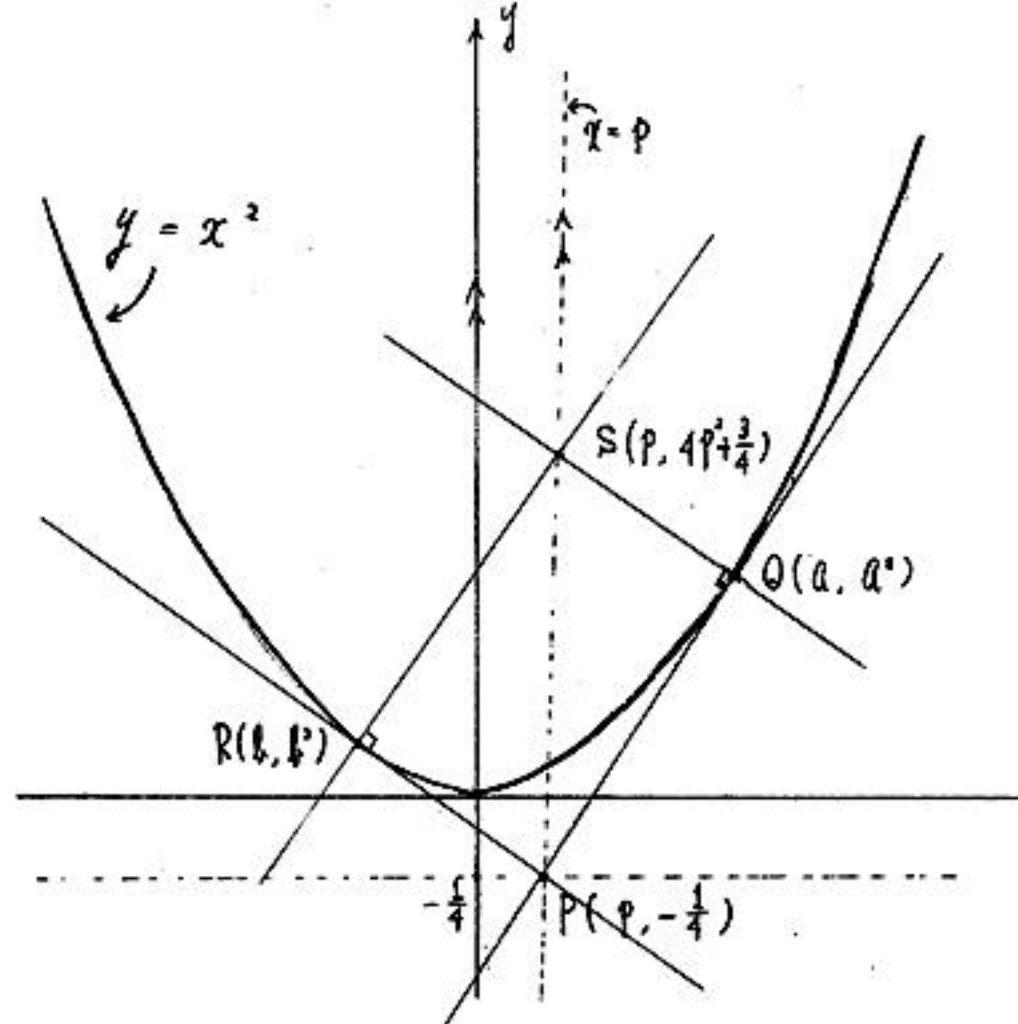
次に、 PT の最小値を調べる。

$$\begin{aligned} PT &= \sqrt{\left(\frac{p}{2} - \frac{3}{32p} - p\right)^2 + \left\{0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{32p}\right)^2 + \frac{1}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{p^2}{2^2} + \left(\frac{3}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{5}{32}} \\ &\geq \sqrt{2 \sqrt{\frac{p^2}{2^2} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{p^2}} + \frac{5}{32}} \quad \because \begin{cases} p > 0 \\ \frac{p^2}{2^2} > 0 \\ \left(\frac{3}{32p}\right)^2 > 0 \end{cases} \\ &\quad \text{[相加相乗平均の不等式]} \end{aligned}$$

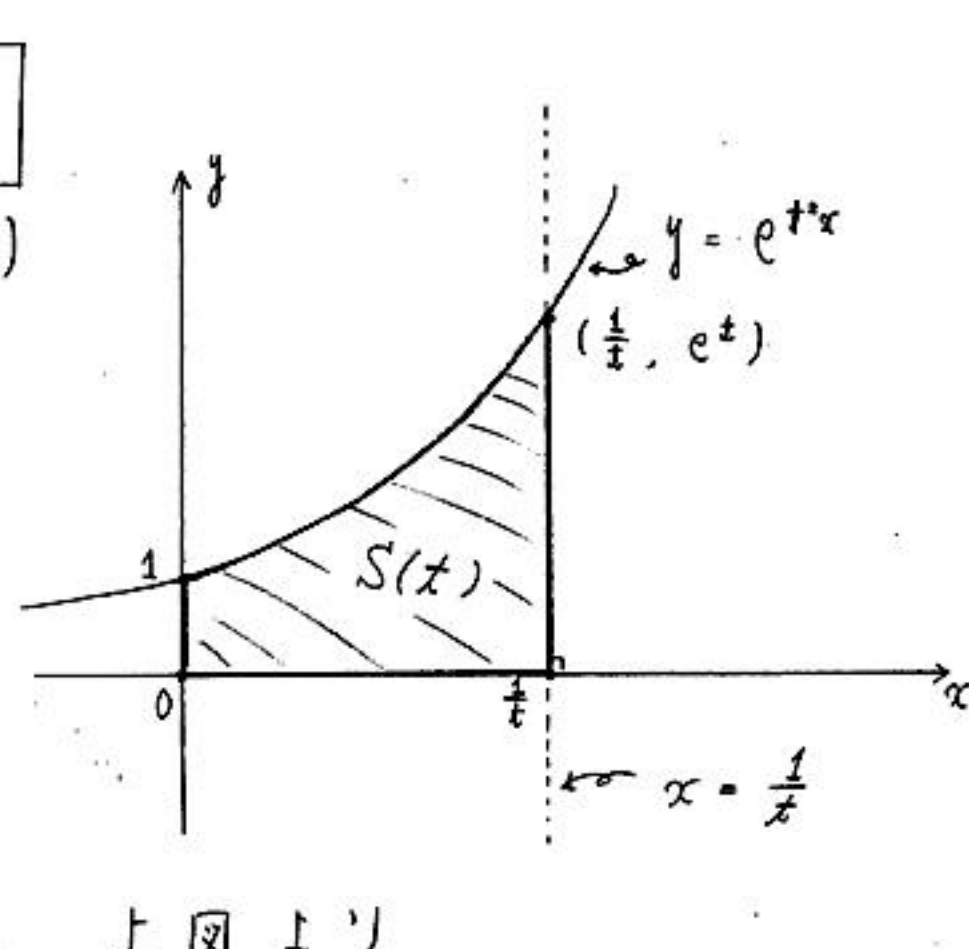
$$\begin{aligned} &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{32} + \frac{5}{32}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{等号成立} : \begin{cases} p > 0 \\ \frac{p^2}{2^2} = \left(\frac{3}{32}\right)^2 \cdot \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots \textcircled{3} \text{ の (答)}$$



(1)



上図より

$$S(t) = \int_0^{\frac{1}{t}} e^{tx} dx$$

$$= \frac{1}{t^2} [e^{tx}]_0^{\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{t^2} (e^t - 1) \quad \dots\dots (答)$$

$$(2) \quad S'(t) = -\frac{2t}{t^3} (e^t - 1) + \frac{1}{t^2} e^t$$

$$= -\frac{2}{t^2} (e^t - 1) + \frac{1}{t^2} e^t$$

$$= \frac{1}{t^2} (-2e^t + 2 + te^t)$$

$$g(t) = -2e^t + 2 + te^t \quad (t > 0)$$

よおき、 $g(t)$ の増減を調べる。

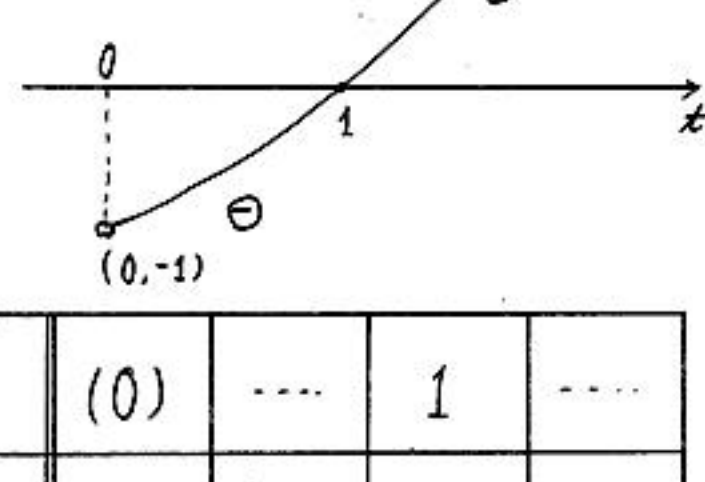
$$g'(t) = -2e^t + e^t + te^t$$

$$= e^t (-1 + t)$$

よ、 7 、

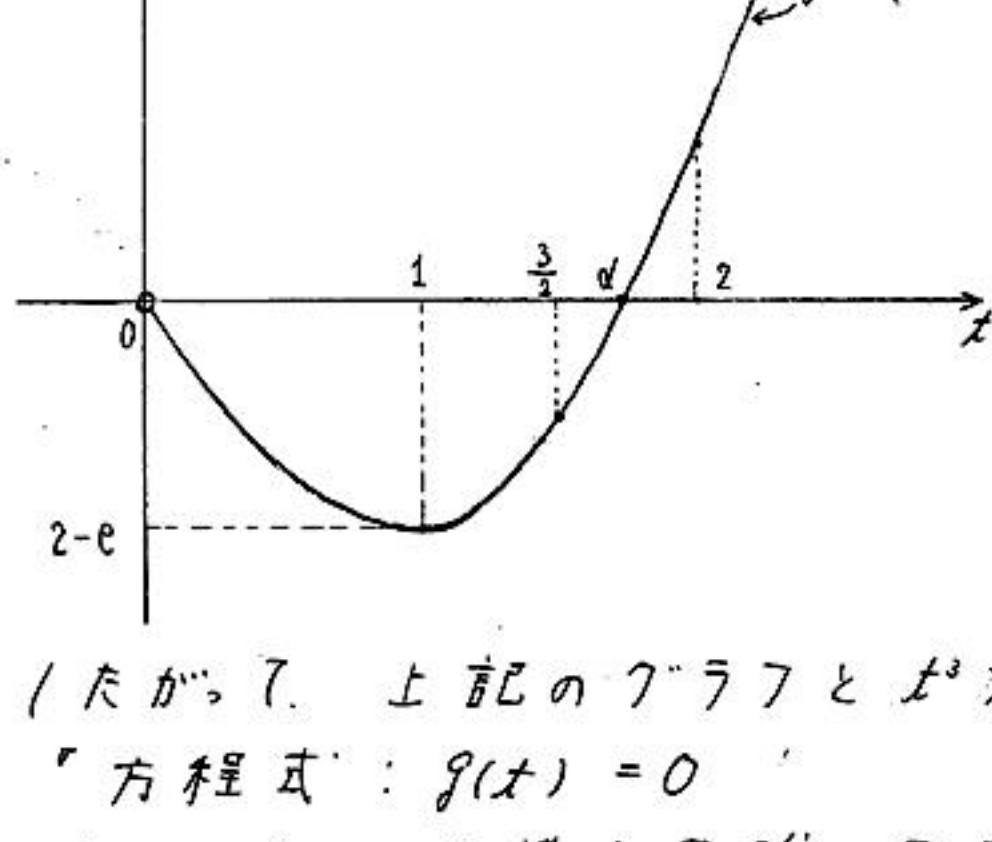
$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t (-1 + t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \quad \because e^t > 0$$

よ、 7 、 $g(t)$ の増減表は次の通りとなる。

t	(0)		1	
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	0	$\searrow$	$2-e$	$\nearrow$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

よ、 7 、 $y = g(t)$ のグラフは次の通りとなる。したがって、上記のグラフと $t > 0$ より

$$「方程式：g(t) = 0$$

には、 $t > 0$ を満たす唯一の実数解が存在する。」

$$\Leftrightarrow 「方程式：S'(t) = 0$$

には、 $t > 0$ を満たす唯一の実数解が存在する。」よ、 7 、題意は示された。//

$$(3) \quad 方程式：g(t) = 0$$

の $t > 0$ を満たす実数解 α が、

$$\alpha > \frac{3}{2}$$

となることを示せばよい。

$$g(\alpha) = 0,$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -2e^{\frac{3}{2}} + 2 + \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(-e^{\frac{3}{2}} + 4)$$

$$< 0$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} 4^2 < 20 < e^4 \\ \Rightarrow 4 < \sqrt{20} < e^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow 4 - e^{\frac{3}{2}} < \sqrt{20} - e^{\frac{3}{2}} < 0 \end{array} \right]$$

(2) で調べた $g(t)$ の増減表とグラフより、 $g(t)$ は、 $t \geq 1$ において単調増加する。したがって、

$$g\left(\frac{3}{2}\right) < g(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \alpha$$

よ、 7 、題意は示された。//

$$(4) \quad 初めに、方程式：S'(t) = 0$$

の正の実数解 $\alpha = d$ について、

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad \dots\dots (*)$$

が成立することとを示す。

(*) の右半分の不等式を示せば十分である。

$$g(\alpha) = 0,$$

$$g(2) = -2e^2 + 2 + 2e^2$$

$$= 2$$

したがって、

$$g(\alpha) < 2$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 2 \quad \because \left[\begin{array}{l} g(t) (t \geq 1) \text{ は、単調} \\ \text{増加関数である。} \end{array} \right]$$

次に、 $t > 0$ において、

$$S(t) > \frac{4}{3}$$

の成立を示す。

 $S'(t)$ の符号は、 $t > 0$ より $g(t)$ の符号に一致する。よって、 $S(t)$ の増減表は次の通りとなる。

t	(0)		α	
$S'(t)$		-	0	+
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

また、

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{t} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right)$$

$$= +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} \left(1 - \frac{1}{e^t} \right)$$

$$= +\infty$$

よって、 $S(t)$ は、 $t = \alpha$ で極小かつ最小となる。

$$S(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} (e^\alpha - 1)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{2}{2-\alpha} - 1 \right) \because \left[\begin{array}{l} g(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}$$

$$> \frac{1}{\frac{3}{2}(2-\frac{3}{2})} \quad \because (*)$$

これが示すべき不等式であった。//

