

1

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
1	3	7	6	1	3	1	9	6	7	6	1	9	6

(a)

$$\text{判別式 } D = (-2k)^2 - 4(2k+3) = 4(k+1)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -1, 3 < k$$

(b) 題意を満たす条件は, (a) に加えて

$$\begin{cases} \text{軸: } x = k \text{ が } -2 < x < 4 & \Rightarrow -2 < k < 4 \\ x = -2 \text{ で } y > 0 & \Rightarrow -\frac{7}{6} < k \\ x = 4 \text{ で } y > 0 & \Rightarrow k < \frac{19}{6} \end{cases}$$

したがって求める k の範囲は

$$-\frac{7}{6} < k < -1, 3 < k < \frac{19}{6}$$

(c) 題意を満たす条件は

$$\begin{cases} x = -2 \text{ で } y \geq 0 \text{ かつ } x = 4 \text{ で } y \leq 0 \\ x = -2 \text{ で } y \leq 0 \text{ かつ } x = 4 \text{ で } y \geq 0 \end{cases}$$

のいずれかなので, 両者を併せると

$$(6k+7)(-6k+19) \leq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{7}{6}, \frac{19}{6} \leq k$$

(2)

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
1	2	1	1	8	5	1	8	1	1	2

(a) $m \leq n$ のものだけ列挙する.

$$(m, n) = (2, 6), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$$

このうち $m < n$ を満たす場合にはその逆もあり得る事を考慮すると 12 通り.

(b) 与式を書き換えると

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 - 40$$

となるので, 方程式 (*) が 1 点を表すのは $m^2 + n^2 - 40 = 0$ のとき. その場合は $(m, n) = (2, 6), (6, 2)$ の 2 通りしかないので求める確率は $\frac{1}{18}$.同様に, 円を描く条件は $m^2 + n^2 > 40$ なので, (a) から $\frac{5}{18}$

(c) 与式が円を表すとき, その内部を示す不等式は

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 < m^2 + n^2 - 40$$

題意を満たすには, $(x, y) = (2, 3)$ がこの不等式を満たせばよいので,

$$(m, n) = (5, 6), (6, 5), (6, 6)$$

の 3 通り. この組み合わせになる確率は $\frac{1}{12}$

(3)

ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ
3	4	2	5	3	5	3	2	5	3	5

 $x = x_0 + x_1$ ($0 \leq x_1 < 1$) とすると

$$f(x) = x_0 + [2(x_0 + x_1 - x_0)] = x_0 + [2x_1] = \begin{cases} x_0 & (0 \leq x_1 < 0.5) \\ x_0 + 1 & (0.5 \leq x_1 < 1) \end{cases}$$

である.

(a) $f(3.4) = 3, f(3.7) = 4$ (b) $f(x) = 3$ を満たす x は $2.5 \leq x < 3.5$ (c) $f(x) + f(2x)$ を計算すると

$$f(x) + f(2x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x_1 < 0.25) \\ 3x + 1 & (0.25 \leq x_1 < 0.5) \\ 3x + 2 & (0.5 \leq x_1 < 0.75) \\ 3x + 3 & (0.75 \leq x_1 < 1) \end{cases}$$

となるので, $f(x) + f(2x) = 10$ を満たす x の範囲は

$$3.25 \leq x < 3.5$$

2

(1)

$$t = a \tan \theta$$

(2)

$|OQ| = a \cos \theta$ なので

$$Q(a \sin \theta \cos \theta, a \cos^2 \theta)$$

また, $\sin \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}}$ なので

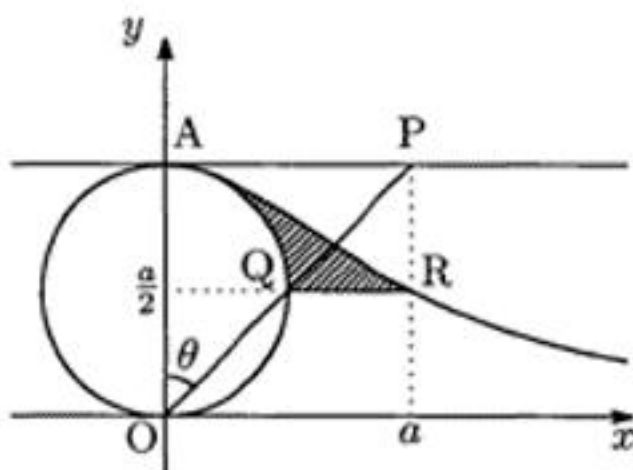
$$Q\left(\frac{a^2 t}{t^2 + a^2}, \frac{a^3}{t^2 + a^2}\right)$$

(3)

(2) より R の座標は $R\left(t, \frac{a^3}{t^2 + a^2}\right)$ なので, R の軌跡を表す方程式は

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

(4)



$$f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \text{ とすると}$$

図より, 求める面積 S は

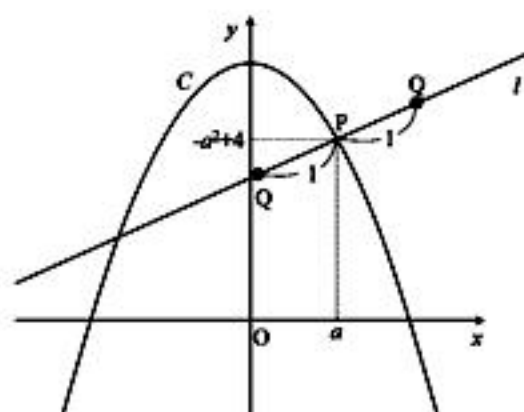
$$S = \int_0^a f(x) dx - \frac{\pi}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{16}(3\pi - 8)$$

3

(1)

P における曲線 C の接線の傾きは $-2a$ なので

$$l: y = \frac{1}{2a}(x-a) + (-a^2+4) = \frac{x}{2a} - a^2 + \frac{7}{2}$$



(2)

l の式を書き直すと

$$x - 2ay - 2a^3 + 7a = 0$$

となるので,

$$d = \frac{|-2a^3 + 7a|}{\sqrt{1 + (-2a)^2}} = \frac{a|7 - 2a^2|}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

したがって, $0 < a < 2$ より $d = 0$ となる a は

$$a = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(3)

$\triangle OPQ$ を, 底辺が PQ となるように見れば, その面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot d = \frac{a|7 - 2a^2|}{2\sqrt{4a^2 + 1}}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}(2S(a))^2 &= \frac{d}{da} \left(\frac{4a^6 - 28a^4 + 49a^2}{4a^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2a}{(4a^2 + 1)^2} (32a^6 - 100a^4 - 56a^2 + 49) \\ &= \frac{2a}{(4a^2 + 1)^2} (2a^2 - 7)(2a^2 - 1)(8a^2 + 7) \end{aligned}$$

ここで $0 < a < 2$ より $\frac{d}{da}(2S(a))^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}$. したがって

a	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$	...	(2)
$\frac{d}{da}(2S(a))^2$	(0)	+	0	-	(0)	+	
$(2S(a))^2$	(0)	$\nearrow$	6	$\searrow$	(0)	$\nearrow$	

増減表より, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $(2S(a))^2$ は最大値 6 をとるが, $S(a) \geq 0$ より, 同時に

$S(a)$ は最大値 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ をとる.