

$$(1) (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 90 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 10)(\log_2 x - 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -10 \leq \log_2 x \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-10} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^9$$

$$\Leftrightarrow 2^{-10} \leq x \leq 2^9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1024} \leq x \leq 512$$

$y = \log_2 x$ は、単調増加関数である。

----- (答)

$$(2) f(x) = (\log_{256} x)(\log_{256} \frac{x}{256})(\log_{256} (256x))$$

$$= (\log_{256} x)(\log_{256} x - \log_{256} 256)(\log_{256} 256 + \log_{256} x)$$

$$= (\log_{256} x)(\log_{256} x - 1)(1 + \log_{256} x)$$

$$X = \log_{256} x$$

とおく。このとき

$$2^{-10} \leq x \leq 2^9$$

$$\Leftrightarrow \log_{256} 2^{-10} \leq \log_{256} x \leq \log_{256} 2^9$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 2^{-10}}{\log_2 2^8} \leq -\log_{256} x \leq \frac{\log_2 2^9}{\log_2 2^8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{8} \leq \log_{256} x \leq \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq X \leq \frac{9}{8} \quad \text{----- ①}$$

次に、

$$F(X) = X(X-1)(X+1)$$

$$= X^3 - X$$

の増減と①の範囲で調べる。

$$F'(X) = 3X^2 - 1$$

よ、7.

$$F'(X) = 0 \Leftrightarrow 3X^2 - 1 = 0$$

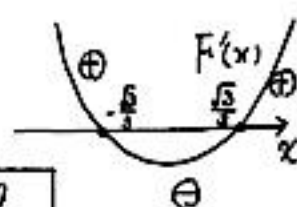
$$\Leftrightarrow X = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よ、7. 増減表は次の通り。

X	$-\frac{5}{4}$	----	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	----	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	----	$\frac{9}{8}$
$F'(X)$		+	0	-	0	+	
$F(X)$	$-\frac{45}{64}$	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{153}{512}$

極大

極小



$$0 < \frac{153}{512} < \frac{1}{3} < \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

$$-\frac{45}{64} < -\frac{2}{3} < -\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

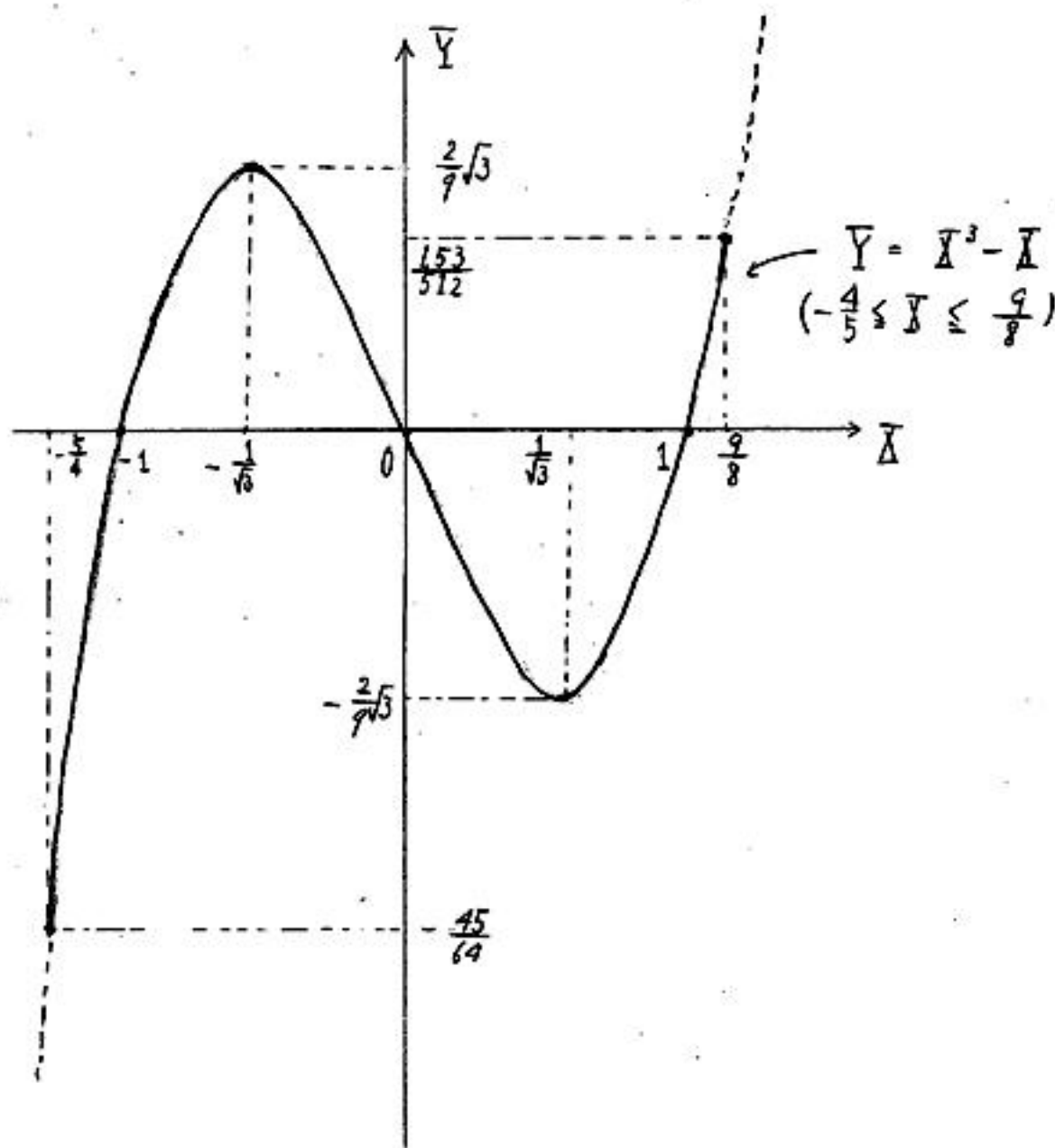
に注意する。

以上より $f(x)$ の最大値、最小値は

$$\text{最大値} : \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$\text{最小値} : -\frac{45}{64}$$

----- (答)



(1) ABを通る直線の方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ \sqrt{1+t^2}+1 \end{pmatrix} \dots\dots ①$$

と表せる. ただし, s はパラメータである.

よって, ①より

$$z=0 \iff -1+s(\sqrt{1+t^2}+1)=0$$

$$\iff s = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1}$$

よって, $\overrightarrow{OP}$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ \sqrt{1+t^2}+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって,

$$(a, b) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}, 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} \right) \dots\dots(\text{答})$$

また,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1} + \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}+0} = 1 \dots\dots(\text{答})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} a = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}+1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{(-t^2)}+1} + \frac{1}{(-t)}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{0+1}+0}$$

$$= -1 \dots\dots(\text{答})$$

(2) 以下では, a, b をそれぞれ $a(t), b(t)$ と表すことにする. 求める軌跡 C は次の性質をもつ.

(その1)

$$\begin{cases} a(t) = -a(-t) \\ b(t) = b(-t) \end{cases} \dots\dots ②$$

よって, 求める軌跡 C は $t \geq 0$ で調べれば十分である.

(その2)

$b(t)$ は $t \geq 0$ において単調増加関数であり,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1} = 1$$

である. よって

$$t \geq 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} = b(0) \leq b(t) < 1 \\ 0 \leq a(t) \end{cases} \dots\dots ③$$

また,

$$t=0 \iff (a(t), b(t)) = \left(0, \frac{1}{2} \right) \dots\dots ④$$

次に $t > 0$ を仮定して軌跡 C の一部を求める.

$$t = \tan \theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

とおく. このとき

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}+1} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}+1} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} \\ \frac{1}{1+\cos \theta} \end{pmatrix} \quad \because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

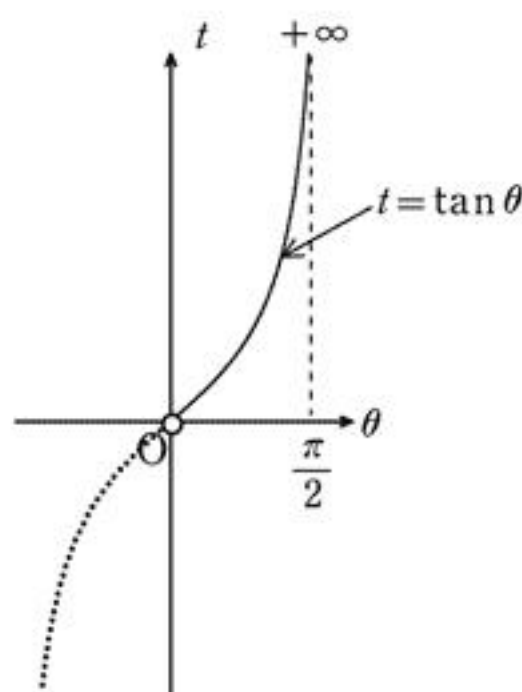
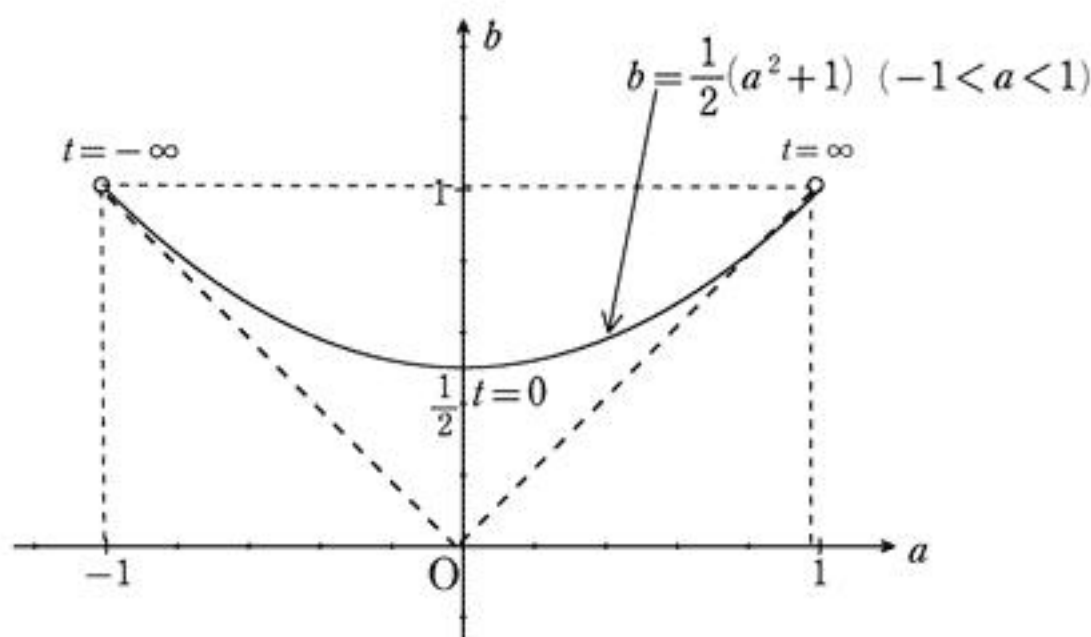
$$\iff \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b}-1 \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix} \quad \dots\dots ⑤ \quad \because ③④$$

したがって, $t > 0$ での軌跡は, ⑤より θ を消去した

$$\left(\frac{1}{b}-1 \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 = 1$$

$$\iff b = \frac{1}{2}(a^2+1) \quad \dots\dots ⑥$$

の第1象限の部分となる. したがって $a(t), b(t)$ が t の連続関数であることと②③④⑥より求める軌跡 C , 下図の実線部分となる. ただし, 白丸 $(1, 1)$ と $(-1, 1)$ は除く.



(1) 1回目の試行で、 r_1 の出方は、

$$1 \leq r_1 \leq k-1$$

よって、 $(k-1)$ 通り。

2回目の試行で、 r_2 の出方は、

$$r_2 = k$$

よって1通り。

3回目の試行で、 r_3 の出方は、

$$k+1 \leq r_3 \leq n$$

よって、 $(n-k)$ 通り。

したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{(k-1) \cdot 1 \cdot (n-k)}{n^3} \\ &= \frac{(k-1)(n-k)}{n^3} \quad \text{----- (答)} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果より、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(n-k)}{n^3} \\ &= \sum_{l=1}^{n-2} \frac{l(n-l-1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{l=1}^{n-2} [-l^2 + l(n-1)] \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ -\frac{1}{6}(n-2)(n-1)[2(n-2)+1] + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)^2 \right\} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{6n^3} (-2n+3+3n-3) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \quad \text{----- (答)} \end{aligned}$$

(3) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。

$$\begin{cases} r_1 = k \\ r_2 \leq k \leq r_3 \end{cases}$$

となるカードの出方は、

r_1 の出方 ----- k 通り

r_2 の出方 ----- 1 通り

r_3 の出方 ----- $(n-k+1)$ 通り

よって、

$$k \cdot 1 \cdot (n-k+1) \text{ [通り]}$$

となる。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n [-k^2 + k(n+1)] \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)^2 \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{6n^3} (-2n-1+3n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6n^2} \quad \text{----- (答)} \end{aligned}$$