

1

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
4	1	6	3	2	4	3	2	7	5	7

(1)

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_{a-2}^{a-1} (x^2 - 2x + a) dx \\
 &= a^2 - 4a + \frac{16}{3} \\
 &= (a-2)^2 + \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

より, $S(a)$ は $a=2$ で最小値 $\frac{4}{3}$ をとる.

(2)

点 H は直線 BC 上にあるので, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$$

と表すことが出来る. ここで $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ より

$$\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 6 - 21t = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{7}$$

したがって

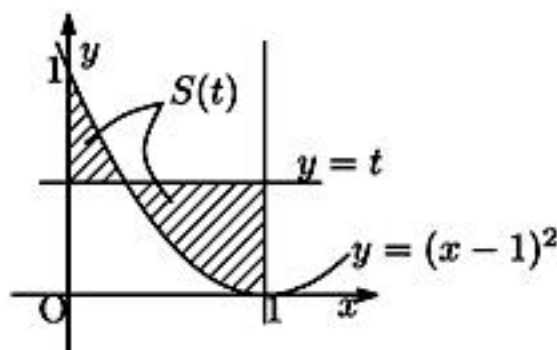
$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$$

2

(1)

式 $((x-1)^2 - y)(t - y) \leq 0$ が表す範囲は

$$\begin{cases} (x-1)^2 \leq y \\ t \geq y \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} (x-1)^2 \geq y \\ t \leq y \end{cases}$$



したがって, $S(t)$ はグラフの斜線部の面積の和になる. ここで放物線 $y = (x-1)^2$ と直線 $y = t$ の交点は $(1 - \sqrt{t}, t)$ だから

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{1-\sqrt{t}} \{(x-1)^2 - t\} dx + \int_{1-\sqrt{t}}^1 \{t - (x-1)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - tx \right]_0^{1-\sqrt{t}} + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 - tx \right]_{1-\sqrt{t}}^1 \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{t}^3 - t + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2)

$S'(t) = 2\sqrt{t} - 1$ より, $S'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$ なので

t	(0)	...	$\frac{1}{4}$	...	(1)
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\left(\frac{2}{3}\right)$

増減表より, $t = \frac{1}{4}$ で $S(t)$ は最小値 $\frac{1}{4}$ を取る.

3

(1)

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (t-1)a_n + \frac{n}{3} \text{ から}$$

$$a_n = \frac{1}{t-1} \left(b_n - \frac{n}{3} \right)$$

これを a_n の漸化式に代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-1} \left(b_{n+1} - \frac{n+1}{3} \right) &= \frac{1}{t-1} \left(b_n - \frac{n}{3} \right) + \frac{n}{3} \\ b_{n+1} &= tb_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

より, b_n の漸化式

$$b_{n+1} = tb_n + \frac{1}{3}$$

を得る。

(2)

(1) で得た b_n の漸化式の両辺を t^{n+1} で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{t^{n+1}} = \frac{b_n}{t^n} + \frac{1}{3t^{n+1}}$$

より, 数列 $\left\{ \frac{b_n}{t^n} \right\}$ を考えると, この階差数列は $\left\{ \frac{1}{3t^{n+1}} \right\}$ なので
 $n=1$ のとき

$$\frac{b_1}{t} = \frac{1}{3t}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{b_1}{t} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3t^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3t} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{3t^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3t^k} = \frac{t^n - 1}{3(t-1)} \end{aligned}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つので, 一般に

$$b_n = \frac{t^n - 1}{3(t-1)}$$

(3)

(2) より, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\left\{ \frac{t^n - 1}{3(t-1)} \right\}$ なので
 $n \geq 2$ では

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \frac{1}{3(t-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (t^k - 1) \\ &= \frac{t^n - t}{3(t-1)^2} - \frac{n-1}{3(t-1)} \end{aligned}$$

この式は $n=1$ でも成り立つので, 一般に

$$a_n = \frac{t^n - t}{3(t-1)^2} - \frac{n-1}{3(t-1)}$$

(4)

(3) より

$$a_4 = \frac{t^4 - t}{3(t-1)^2} - \frac{3}{3(t-1)} = \frac{t^2 + 2t + 3}{3}$$

なので

$$\begin{aligned} 9 &< \frac{t^2 + 2t + 3}{3} & \frac{t^2 + 2t + 3}{3} &< 34 \\ 0 &< (t-4)(t+6) & (t-9)(t+11) &< 0 \end{aligned}$$

$$\therefore t < -6, 4 < t \qquad \therefore -11 < t < 9$$

これらに加え, 最初に与えられた条件 $t > 1$ も考慮すると

$$4 < t < 9$$