

D 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内の ア から ヨ にあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、 は 2 桁の整数であり、分数における分母と分子は、1 以外の公約数をもたないとする。また、 内の あ から う については、真 または 偽 のうちあてはまる方を、解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。 (45 点)

(1) さいころを 3 回まで投げるができる。2 回目を投げるかどうかは 1 回目に出た目によって決め、3 回目を投げるかどうかは 2 回目に出た目によって決める。1 回目に出た目によって 2 回目を投げないことに決めた場合は、1 回目に出た目をそのまま得点とし、2 回で投げるのをやめた場合は、2 回目に出た目を、3 回投げた場合は 3 回目に出た目をそれぞれ得点とする。

(a) 1 回目に 3 以下の目が出たときは 2 回目を投げるが、4 以上の目が出たときは、ここで投げるのをやめる。2 回目も再び 3 以下の目が出たときだけ、3 回目を投げることにする。この場合、得点が 3 以下となる確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(b) 1 回目に 4 以下の目が出たときは 2 回目を投げるが、5 以上の目が出たときは、ここで投げるのをやめる。2 回目も再び 4 以下の目が出たときだけ、3 回目を投げることにする。この場合、得点が 3 または 4 となる確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ} + \text{オ}}$ である。

(c) (b) の場合に、得点が 6 となる確率は $\frac{\text{カ} + \text{キ}}{\text{ク} + \text{ケ}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) 正の実数 a に対し、 x の 2 次関数 $f_a(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + 2a + \frac{1}{a} - 3$ が定められている。

(a) a が正の範囲を動くとき、放物線 $y = f_a(x)$ の頂点 P は、曲線 $y = x^{\boxed{\text{コ}}} + \frac{1}{x^{\boxed{\text{カ}}}} - \boxed{\text{シ}}$ の、 x 座標が正である部分を動く。このことから、頂点 P の y 座標の最小値が $-\boxed{\text{ス}}$ であることがわかる。

(b) すべての正の実数 a に対して $f_a(k\sqrt{a}) > 0$ が成り立つような正の整数 k のうち最小のものは $\boxed{\text{セ}}$ である。

(c) $f_a(0) \leq 0$ となるような、 a の値の範囲は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ である。

(d) 次の (i) から (iii) のそれぞれの命題について、真偽を調べると次のようになる。

(i) 命題「すべての正の実数 a とすべての実数 x に対して、 $f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{\text{あ}}$ である。

(ii) 命題「どんな正の実数 a に対しても、ある実数 x をとると $f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{\text{い}}$ である。

(iii) 命題「ある実数 x に対して、正の実数 a をどのようにとっても $f_a(x) > 0$ である」は $\boxed{\text{う}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) t を媒介変数として

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos t \\ y = \sin t + \frac{1}{3} \cos 2t \end{cases}$$

で表される座標平面上の点 $P(x, y)$ が描く曲線 C を考える。

最初に、媒介変数 t の値が $\pi \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動く場合に、 y の増減を調べることに、この場合 y の値は、 $-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \leq y \leq \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ の範囲を動くことがわかる。

次に、媒介変数 t の値が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動く場合に、 y の増減を調べることに、この場合 y の値は、 $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ $\leq y \leq \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ の範囲を動くことがわかり、このときさらに x の値の変化を調べることで、曲線 C 上の点で y 座標の値が最大となるような点は $\boxed{\text{フ}}$ 個あり、これらの点の x 座標のうち、最も値が大きいものは $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} \sqrt{\boxed{\text{マ}}}$ であることがわかる。

媒介変数 t の値がこれらの2つの範囲にある場合のそれぞれについて、 y および x の値の変化を調べることによって、直線 $y = a$ と曲線 C との共有点の数は、 a の値が $\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} < a < \frac{\boxed{\text{メモ}}}{\boxed{\text{ヤユ}}}$ の範囲にあるとき $\boxed{\text{ヨ}}$ 個となり、最も多くなることがわかる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 座標平面上に、中心の x 座標が正であり半径が a の円 C_1 と、中心の y 座標が正であり半径が b の円 C_2 がある。円 C_1 は y 軸に接し、円 C_2 は x 軸に接し、さらにこれらの円は外接している。ただし、 a と b は正の定数である。2つの円 C_1, C_2 が、これらの条件をすべて満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。 (25 点)

(1) 円 C_1 と円 C_2 の接点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接点 P の軌跡が描く曲線によって囲まれる図形の面積を、積分を計算することにより求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 $m < n$ を満たす自然数 m, n の組に対して、実数 a, b, c を係数にもつ 3 次式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が、 $x^2 + 1$ で割ったときの余りが $(mn - 1)x + m + n$ であり、かつ $x^2 - 1$ で割ったときの余りが $(mn + 1)x - (m + n)$ であるように定められている。以下の問いに答えよ。 (30 点)

- (1) a, b, c を m, n の式で表せ。
- (2) $P(x) = 0$ の解を m, n の式で表せ。
- (3) 曲線 $y = P(x)$ と x 軸によって囲まれる図形のうち、 x 軸の上側にある部分の面積を S とおき、 x 軸の下側にある部分の面積を T とおく。 S と T がともに整数であるとき、 m, n はともに偶数であることを証明せよ。
- (4) S と T がともに整数であるための必要十分条件を、 $m = 2k$ を満たす整数 k と $n = 2l$ を満たす整数 l の和 $k + l$ に関する条件として述べよ。
- (5) S と T がともに整数となり、かつ不等式 $S + T \leq 240$ が満たされるような自然数 m, n の組のとり方をすべて求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。