

D 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入
しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 座標平面上で、連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の表す領域を D 、原点を中心とする半径 1 の円周と D との共通部分である円弧を C とする。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす t に対して、直線 $y = t$ と C との交点を P とし、 x 軸に垂直な直線で P を通るものと x 軸との交点を Q とする。さらに、領域 D の点 R を、直線 $y = t$ 上に、 P と Q の距離と P と R の距離との和が 1 となるようにとる。 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、点 R が描く曲線を F とする。このとき、次の問いに答えよ。 (50 点)

- (1) $0 \leq t \leq 1$ を満たす t に対して、点 R の座標を $(h(t), t)$ とおく。関数 $h(t)$ を求めよ。また、 $h(t)$ の最大値 M と、そのときの t の値を求めよ。
- (2) 実数 s が $0 \leq s < M$ を満たすとき、直線 $x = s$ と曲線 F との共有点の座標を $(s, a(s))$ と $(s, b(s))$ とする。ただし、 $a(s) > b(s)$ である。 $a(s) - b(s)$ と $a(s) + b(s)$ を求めよ。
- (3) 不定積分 $\int u\sqrt{1-u^2} du$ を求めよ。
- (4) 曲線 F と円弧 C および x 軸の囲む図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 $\log x$ は x の自然対数を表す。

(50 点)

(1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について、次の問いに答えよ。

(a) 導関数 $f'(x)$ と第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(b) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(c) 関数 $y = f(x)$ のグラフの変曲点を求めよ。

(2) 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\log(n+1)}{n+1} \{x^3 - (n+1)x^2\}$$

により定める。

(a) 実数 θ を変数とする関数 $f_n(\sin \theta) + f_n(\cos \theta)$ の最大値 M_n と最小値 m_n を求めよ。

(b) (a) で求めた M_n と m_n に対して、 $a_n = M_n - m_n$ により数列 $\{a_n\}$ を定める。 n が自然数全体を動くときの a_n の最大値を求めよ。

(c) (b) で定めた数列 $\{a_n\}$ に対して、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ により定める。 n が自然数全体を動くときの b_n の最小値を求めよ。ただし、自然対数の底 e に関して、 $2^{\frac{4}{3}} < e < 5^{\frac{2}{3}}$ であることを用いてよい。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。