

E 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの所定欄にマークせよ。ただし、 は 2桁の数、 は 3桁の数を表し、問題文中に **ア**、**イウ** などが 2 度以上現れる場合、2 度目以降は、**ア**、**イウ** のように細字で表記する。なお、(1) の **あ** には、あてはまる + か - の記号を求め、その記号を解答用マークシートの所定欄にマークせよ。

分数は既約分数 (それ以上約分できない分数) とする。また、根号を含む解答では、根号の中に現れる自然数が最小となる形で表すものとする。 (45 点)

(1) 区間 $0 \leq x \leq 3$ で、関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & (0 \leq x \leq 2) \\ 2(5-x) & (2 < x \leq 3) \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (0 \leq x \leq 3) \text{ とおくと, } F(0) = \text{ア}, \quad F(2) = \text{イ},$$

$F(3) = \text{ウ}$ である。また、 $F(x)$ の逆関数 $F^{-1}(x)$ は次のようになる。

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\text{エ}x} & (\text{ア} \leq x \leq \text{イ}) \\ \text{オ} \text{あ} \sqrt{\text{カキ} - x} & (\text{イ} < x \leq \text{ウ}) \end{cases}$$

(記号)

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。

(2) 5 次の多項式 $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ を展開した式を

$$x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

とおく。

(a) $P(x)$ を展開した式は、5 個の因数 $x+1, x+2, \dots, x+5$ のそれぞれから x または自然数 n ($1 \leq n \leq 5$) のどちらかを選び、それらを掛け合わせてできる項の和を整理したものである。よって、 x^4 の係数 c_4 は ク ケ である。

(b) x^2 の係数 c_2 を求めるには、1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる コ 個の数字を選んでできる サ シ 通りのすべての組合せを列挙し、それぞれの選び方について コ 個の数字の積を求めて、それらの総和を計算すればよい。よって、 c_2 は ス セ ソ である。

(c) 定数項 c_0 は タ チ ツ である。

(d) 方程式 $P(x) + P(-x) = 0$ を考える。これを整理した式を

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

とすると、係数は順に $a_3 = \text{テ}$, $a_2 = \text{ト ナ}$, $a_1 = \text{ニ}$, $a_0 = \text{ヌ}$ となる。この 4 次方程式を解くと、4 つの解

$$x = -\frac{\sqrt{\text{ネ ノ}} \pm \text{ハ} \sqrt{\text{ヒ フ ヘ}}}{\text{ホ}} i,$$

$$\frac{\sqrt{\text{ネ ノ}} \pm \text{ハ} \sqrt{\text{ヒ フ ヘ}}}{\text{ホ}} i$$

が得られる。ただし、 i は虚数単位である。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。

(3) 空間内に、 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル

$$\vec{p} = (\cos \theta - \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta),$$

$$\vec{q} = \left(\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta, \cos \theta - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta \right)$$

があり、 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとする。

(a) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が垂直になるような θ の値は、小さい順に

$$\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}} \mid \boxed{\text{ム}}} \pi, \quad \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}} \mid \boxed{\text{ヤ}}} \pi$$

である。

(b) $\int_0^{\frac{2}{3}\pi} |\vec{p}|^2 d\theta = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}} \pi - \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ である。

(c) $|\vec{q}|$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{ル}} + \sqrt{\boxed{\text{レ}}}}{\boxed{\text{ロ}}}$ である。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。

問題 **2** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 k を定数とし、 E を 2 次の単位行列とする。行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて表

された、 x, y の連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が、 $x = y = 0$ 以外の解をもつ
という。次の問いに答えよ。 (25 点)

(1) $A - kE$ が逆行列をもたないことを示し、 k のとり得る 2 つの値 α, β ($\alpha < \beta$)
を求めよ。

(2) (1) で求めた α, β に対して

$$A \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす u と v の値を求めよ。

(3) n は自然数とし、 u と v は (2) で求めた値とする。

(a) $A^2 \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}, A^n \begin{pmatrix} u \\ -1 \end{pmatrix}, A^n \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。

(b) $A^n \begin{pmatrix} u & v \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ と A^n を求めよ。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。

問題 **3** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 以下で $\log x$ は x の自然対数を表し、 e は自然対数の底を表す。 (30 点)

(1) (a) 不定積分 $\int (\log x)^2 dx$ を求めよ。

(b) 関数 $f(x) = x - e \log x$ の増減表を書け。また、不等式 $f(x) \geq 0$ ($x > 0$) が成り立つことを示せ。

(2) k は正の定数とする。このとき、2 つの曲線

$$C : y = g(x) = \sqrt{e} \log x$$

$$D : y = h(x) = ke^{-x}$$

は、第 1 象限内の 1 点 P で交わる。 P の x 座標を α として、次の問いに答えよ。

(a) k を α の式で表せ。

(b) 交点 P における 2 曲線の接線が互いに直交するとき、 α の値を求めよ。

(c) (b) で求めた α の値に対して、曲線 C と x 軸および直線 $x = \alpha$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転させる。このときできる立体の体積 V を求めよ。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。