

E 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入
しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 t は $t > 1$ を満たす定数とする。関数

$$f(x) = \frac{\cos x}{t - \sin x} - \frac{1}{t} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

について、次の問いに答えよ。 (50 点)

- (1) $f(x)$ は $x = \alpha$ で最大値 M をとり、 $x = \beta$ で最小値 m をとる。 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, M , m をそれぞれ t で表せ。
- (2) $0 < x < 2\pi$ の範囲で $f(x) = 0$ となる x の値を γ とする。 $\sin \gamma$ と $\cos \gamma$ を t で表せ。
- (3) $t = \sqrt{3}$ とするとき、 γ の値を求めよ。また、このとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。

問題 **2** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 次の問いに答えよ。

(50 点)

(1) a, b を正の実数とし、関数 $f(x) = x^3 - a^2x - b$ を考える。

(a) $f(x)$ の極大値、極小値と、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(b) 方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつときの必要十分条件を、 a, b の式で表せ。

(2) 座標平面上に放物線 $C: y = x^2$ がある。

(a) 放物線 C 上の、原点以外の点 $P(t, t^2)$ ($t \neq 0$) における法線 ℓ の方程式を求めよ。さらに、この法線 ℓ が点 $Q(u, v)$ を通るとする。このとき、 t, u, v の関係式を、 t について整理した形で求めよ。

(b) n を自然数とする。放物線 C の法線で、点 $Q(n, 5)$ を通るものがただ 1 本だけ引けるとする。すなわち、 C 上にただ 1 点 $P(t_n, t_n^2)$ がとれて、この点における法線のみが、点 $Q(n, 5)$ を通るとする。そのような n の最小値 N を求めよ。

(c) 自然数 n が (b) で求めた N 以上のとき、 $\sqrt[3]{\frac{n}{2}} < t_n < \sqrt[3]{2n}$ であることを証明せよ。

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^3}{n}$ を求めよ。

右のページは白紙である。計算欄として使用せよ。