

A 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 実数 x, y は $4x^2 + 4y^2 + 7xy + x + y - 1 = 0$ を満たしているとする。このとき $u = x + y$ および $v = xy$ のとり得る値の範囲を求めよう。

(a) u のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ア} \\ \hline \text{イ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{イ} \\ \hline \end{array}} \leq u \leq \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ウ} \\ \hline \text{エ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{エ} \\ \hline \end{array}}$$

である。

(b) v を u で表すと,

$$v = \begin{array}{|c|} \hline \text{オ} \\ \hline \end{array} u^2 + \begin{array}{|c|} \hline \text{カ} \\ \hline \end{array} u - \begin{array}{|c|} \hline \text{キ} \\ \hline \end{array}$$

であるから, v のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ク} & \text{ケ} \\ \hline \text{コ} & \text{サ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{コ} & \text{サ} \\ \hline \end{array}} \leq v \leq \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{シ} \\ \hline \text{ス} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ス} \\ \hline \end{array}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) 以下の問いに答えなさい。

(a) m を実数の定数とする。 x の関数 $f(x) = (2m - m^2)x^{2m^2+3m-4}$ が区間 $x > 0$ で増加するのは m が、

$$\frac{-\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}} < m < \boxed{\text{オ}},$$

$$\frac{-\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} < m < \boxed{\text{コ}}$$

のときである。

(b) m を自然数の定数とする。 x の関数 $f(x) = (2m - m^2)x^{2m^2+3m-4}$ が区間 $x > 0$ で増加するのは、 $m = \boxed{\text{サ}}$ のときである。 m の値を $\boxed{\text{サ}}$ とするときの関数 $f(x)$ および 3 つの整数 a, b, c を用いて次の式

$$g(x) = \frac{a\{f(x)\}^2 + 2}{bf(x) + c}$$

で定義される関数 $g(x)$ を考える。関数 $g(x)$ が以下の 3 つの条件：

- $x \neq 0$ のとき、 $g(x) = -g(-x)$
- $g(1) = 2$
- $g(2) < 3$

をすべて満たすのは、 $a = \boxed{\text{シ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ス}}$ 、 $c = \boxed{\text{セ}}$ 、または

$a = \boxed{\text{ソ}}$ 、 $b = \boxed{\text{タ}}$ 、 $c = \boxed{\text{チ}}$ のときである。ここで、 $\boxed{\text{シ}} < \boxed{\text{ソ}}$ とする。

右のページは白紙です。

(3) 座標平面上に2つの円 $C_0: (x+a)^2 + y^2 = 1$, $C_1: (x-a)^2 + y^2 = 1$ および C_0 , C_1 とそれぞれ異なる2点で交わる1つの直線 $l: y = bx + c$ がある。ただし, a, b, c は, $0 < a < 1$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ とする。直線 l と円 C_0 の2つの交点を P_1, P_3 とし, 直線 l と円 C_1 の2つの交点を P_2, P_4 とし, 4点 P_1, P_2, P_3, P_4 が次の3つの条件:

- P_1, P_2, P_3, P_4 はすべて異なる
- P_1 の x 座標は P_3 の x 座標より小さく, P_2 の x 座標は P_4 の x 座標より小さい
- $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4$

をすべて満たすような a, b, c について考える。

(a) 線分 P_1P_4 がもっとも長くなるのは, $a = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$, $c = \boxed{\text{エ}}$ のときである。このとき, $P_1P_4 = \boxed{\text{オ}}$ である。

(b) $P_1P_4 = 1$ となるのは,

$$a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}, \quad b = \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}, \quad c = \boxed{\text{サ}}$$

または

$$a = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad b = \boxed{\text{セ}}, \quad c = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \times \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

のときである。

右のページは白紙です。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2

(25 点)

(1) 行列 J を $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とし、2 次の正方行列 A は

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} J$$

を満たしているとする。

(a) 行列 J の n 乗 J^n を求めなさい。ただし、 n は自然数である。

(b) 行列 A の n 乗 A^n を求めなさい。ただし、 n は自然数である。

(2) 曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ について、 $y \leq 5$ の部分の長さを求めなさい。

ただし、 e は自然対数の底である。また、曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さは

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて次の定積分

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

で表される。

右のページは白紙です。

3

$f(x)$ は次の等式を満たす関数とする。

$$f(x) = (e^{-x} + e^x) \cos x - 2x - \int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

ただし、 e は自然対数の底であり、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

(25 点)

- (1) $x = 0$ のときの関数の値 $f(0)$ および微分係数 $f'(0)$ を求めなさい。
- (2) 関数 $g(x)$ を $g(x) = e^x f(x)$ で定める。導関数 $g'(x)$ を求めなさい。
- (3) 関数 $f(x)$ を求めなさい。