

B 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 自然数 n に対して, x の関数

$$f_n(x) = \log_6 x - 4 \log_{6^2} x + \cdots + n(-2)^{n-1} \log_{6^n} x$$

を考える。ここに, $\log_{6^n} x$ の底 6^n は 6 の n 乗である。

(a) $f_3(6) =$ ア $$ であり, $f_6(6) = -$ イウ $$ である。

(b) 不等式

$$f_n(x) > \frac{1 - 2^n \cos n\pi}{12} \log_6(18x^2 - 25)$$

を満たす x の値の範囲は, n が奇数のとき,

$$\frac{\sqrt{\text{エ}} \sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}} < x < \sqrt{\text{キ}} - \sqrt{\text{ク}} \text{ および } \sqrt{\text{ケ}} + \sqrt{\text{コ}} < x$$

であり, n が偶数のとき,

$$\sqrt{\text{サ}} - \sqrt{\text{シ}} < x < \sqrt{\text{ス}} + \sqrt{\text{セ}}$$

である。ただし, ケ > コ, ス > セ とする。

右のページは白紙です。

- (2) 座標平面上を動く点 P は時刻 0 には点 (1, 2) にあり, 1 秒ごとに以下の規則で動く。

ある時刻における点 P の座標を (x, y) とすると, その 1 秒後に点 P は確率 $\frac{2x}{2x+y}$ で点 $(x-1, y+3)$ にあり, 確率 $\frac{y}{2x+y}$ で点 $(x+1, y-1)$ にある。

時刻 0 から t 秒後における点 P の座標を (x_t, y_t) とするとき, 以下の問いに答えなさい。ただし, t は自然数とする。

- (a) 2 秒後の点 P の座標 (x_2, y_2) が $(x_2, y_2) = (1, 4)$ である確率は

$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}} \mid \boxed{\text{ウ}}}$ であり, 3 秒後の点 P の座標 (x_3, y_3) が $(x_3, y_3) = (2, 3)$

である確率は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}} \mid \boxed{\text{カ}}}$ である。

- (b) 5 秒後の点 P の座標 (x_5, y_5) について

$$\boxed{\text{キ}} x_5 + y_5 = \boxed{\text{ク}}$$

が成り立つ。また, x_5 のとりうる値は $\boxed{\text{ケ}}$ 通りあり, その最小の値は $\boxed{\text{コ}}$ であり, 最大の値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

- (c) 100 秒後の点 P の座標 (x_{100}, y_{100}) について x_{100} のとりうる値は $\boxed{\text{シ}} \mid \boxed{\text{ス}}$ 通りあり, その最小の値は $\boxed{\text{セ}}$ であり, 最大の値は $\boxed{\text{ソ}} \mid \boxed{\text{タ}}$ である。

右のページは白紙です。

- (3) 座標平面において、2つの放物線 $y = -x^2 + 4$ と $y = x^2 - 2mx + m^2 + m + 1$ が異なる2点で交わるような実数 m を考える。この2つの交点を P, Q とし、P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とする。ただし、 $\alpha > \beta$ とする。

(a) m のとり得る値の範囲は $-\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}} < m < -\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(b) $\alpha\beta$ の値が最小となるのは $m = -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のときで、その値は

$\alpha\beta = -\frac{\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。また、 $\alpha - \beta$ の値が最大となるのは

$m = -\boxed{\text{コ}}$ のときで、その値は $\alpha - \beta = \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(c) 点 P における放物線 $y = -x^2 + 4$ の接線と、点 Q における放物線 $y = -x^2 + 4$ の接線の交点を R とする。 m を動かすとき、点 R は放物線

$y = -\boxed{\text{シ}}x^2 - \boxed{\text{ス}}x + \frac{\boxed{\text{セ}}\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ 上を動く。

右のページは白紙です。

問題 **2**, **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2

(25 点)

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 5}$ について、以下の問いに答えなさい。

ここで、 e は自然対数の底である。

(a) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めなさい。

(b) 定積分 $\int_0^a f(x) dx$ の値が $\log \sqrt[3]{2}$ となるように、 a の値を定めなさい。

ただし、 $\sqrt[3]{2}$ は 2 の 3 乗根である。

(2) x の関数 y が媒介変数 θ を用いて

$$x = 1 - \cos \theta, \quad y = \theta - \sin \theta$$

と表されているとき、以下の問いに答えなさい。

(a) $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ θ で表しなさい。

(b) $\tan \frac{\theta}{2} = 2$ のとき、 $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値をそれぞれ求めなさい。

右のページは白紙です。

3

座標平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 4$ および楕円 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。

正の定数 m に対し、楕円 E の、傾きが m である 2 つの接線を l_1, l_2 (直線 l_1 は直線 l_2 の上側部分にあるものとする) とし、直線 $y = mx$ と円 C の第一象限における交点を P 、点 P から x 軸に下ろした垂線が第一象限において楕円 E と交わる点を Q とする。

(25 点)

- (1) 直線 l_1, l_2 の方程式をそれぞれ求めなさい。
- (2) 点 P と点 Q の座標をそれぞれ求めなさい。
- (3) a を定数とする。直線 l_1, l_2 の両方に接する円で、中心の x 座標が a であるものを求めなさい。
- (4) 直線 l_1, l_2 の両方に接する円で、点 Q を通り、中心が楕円 E の外部にあるものを求めなさい。