

# L 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
  - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークしなさい。
  - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ノ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を、

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 7b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。定数  $p$ ,  $q$  は、すべての自然数  $n$  に対して

$$a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$$

を満たすとする。このとき、

$$q = 2p + \text{ア}, \quad pq = \text{イ}p - 4$$

となり、これから  $q$  を消去すると、 $p$  は方程式

$$p^2 - \text{ウ}p + \text{エ} = 0$$

を満たす。したがって、

$$p = \text{オ}, \quad q = \text{カ} \quad \text{または} \quad p = \text{キ}, \quad q = \text{ク}$$

となる。これより、数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を求めると、

$$a_n = \text{ケ} \times \text{コ}^n - \text{サ}^n, \quad b_n = \text{シ}^n - \text{ス}^n$$

となる。

右のページは白紙です。

(2)  $xy$ 平面において, 2直線  $y = kx$ ,  $y = \ell x$  ( $0 < k < \ell$ ) のなす角  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) は,

$$\tan \alpha = \frac{\ell - k}{\boxed{\text{セ}} + k\ell}$$

を満たす。これより, 2直線  $y = (2 - \sqrt{3})x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  のなす角  $\beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ) は,

$$\beta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。また,

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{\boxed{\text{タ}}} - 1$$

であるので, 2直線  $y = mx$ ,  $y = \sqrt{2}x$  ( $0 < m < \sqrt{2}$ ) のなす角が  $\frac{\pi}{8}$  となるとき,

$$m = \frac{\boxed{\text{チ}} + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

(3) 2次方程式  $x^2 - 6x + 4 = 0$  の2つの解を  $\alpha, \beta$  とするとき,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}$$

である。 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  の整数部分を  $m$ , 小数部分を  $p$  とおく。さらに  $\frac{1}{p}$  の整数部分を  $n$ , 小数部分を  $q$  とおく。このとき,

$$m = \boxed{\text{ニ}}, \quad n = \boxed{\text{ヌ}}$$

である。整数  $k$  に対して,  $p + kq$  が有理数となるのは

$$k = - \boxed{\text{ネ}}$$

のときである。このとき,

$$p + kq = - \boxed{\text{ノ}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** , **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

**2**  $xy$  平面において、直線  $y = -\frac{1}{4}$  上の点  $P\left(p, -\frac{1}{4}\right)$  から放物線  $y = x^2$  へ 2 本の接線をひき、それらの接点を  $Q(a, a^2)$ ,  $R(b, b^2)$  とする。点  $Q$ ,  $R$  における 2 つの法線の交点を  $S$  とする。

- (1) 積  $ab$  の値を求めよ。
- (2) 点  $S$  の  $x$  座標を、 $p$  を用いて表せ。
- (3) 点  $P$  が直線  $y = -\frac{1}{4}$  上を動くときの点  $S$  の軌跡を  $C$  とする。曲線  $C$  の方程式を求めよ。
- (4)  $p > 0$  とし、(3) で求めた曲線  $C$  の点  $S$  における接線と  $x$  軸との交点を  $T$  とする。このとき、 $P$  と  $T$  の距離が最小となる  $p$  の値を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

**3**  $t$  を正の定数とする。  $xy$  平面において、曲線  $y = e^{t^2x}$  と  $x$  軸、  $y$  軸、 および直線  $x = \frac{1}{t}$  で囲まれた図形の面積を  $S(t)$  とする。ただし、  $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $S(t)$  を、  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $t$  の関数  $S(t)$  の導関数  $S'(t)$  を考える。  $t > 0$  の範囲で、方程式  $S'(t) = 0$  はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。
- (3) 方程式  $S'(t) = 0$  の正の実数解を  $\alpha$  とおく。このとき、  $\alpha > \frac{3}{2}$  であることを示せ。必要ならば、  $e^3 > 20$  を用いてもよい。
- (4)  $t > 0$  の範囲で、不等式

$$S(t) > \frac{4}{3}$$

が成り立つことを示せ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。