

(1)

ア	9
イウエ	199
オカ	40
キク	26
ケコ	12
サシ	33
スセ	19
ソタ	23
チツ	35

(2)

テト	1,1
ナ	2
ニ	2
ヌ	6
ネ	2
ノ	6
ハヒフ	3,2,3
ヘ	2
ホ	0

$$\begin{aligned}
 (1) \quad c_{n+1} &= a_{n+1} - 2b_{n+1} \\
 &= 4b_n + 2 - 2a_n - 2 \\
 &= -2(a_n - 2b_n) \\
 &= -2c_n \\
 c_1 &= a_1 - 2b_1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= a_{n+1} + 2b_{n+1} \\
 &= 2a_n + 2 + 4b_n + 2 \\
 &= 2(a_n + 2b_n) + 4 \\
 &= 2d_n + 4 \\
 d_1 &= a_1 + 2b_1 = 5
 \end{aligned}$$

よって $\{c_n\}$ について, $c_1 = 1, c_{n+1} = -2c_n$

(答) $\{d_n\}$ について, $d_1 = 5, d_{n+1} = 2d_n + 4$

(2) $\{c_n\}$ について, (1) より,

$$\begin{aligned}
 c_n &= c_1(-2)^{n-1} \\
 &= (-2)^{n-1}
 \end{aligned}$$

$\{d_n\}$ について, (1) より,

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} + 4 &= 2(d_n + 4) \\
 d_n + 4 &= (d_1 + 4) \cdot 2^{n-1} \\
 d_n &= 9 \cdot 2^{n-1} - 4
 \end{aligned}$$

よって $c_n = (-2)^{n-1}, d_n = 9 \cdot 2^{n-1} - 4$ (答)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sum_{k=1}^n c_k &= \sum_{k=1}^n (-2)^{k-1} \\
 &= \frac{1(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)} \\
 &= \frac{1}{3} \{1 - (-2)^n\} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n d_k &= \sum_{k=1}^n (9 \cdot 2^{k-1} - 4) \\
 &= \frac{9(1 - 2^n)}{1 - 2} - 4n \\
 &= 9 \cdot 2^n - 4n - 9 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} c_n &= a_n - 2b_n \\ d_n &= a_n + 2b_n \end{aligned} \right\} \text{より} \quad \left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(c_n + d_n) \\ b_n &= \frac{1}{4}(d_n - c_n) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって, } A_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n d_k \\
 &= \frac{1}{6} \{1 - (-2)^n\} + 9 \cdot 2^{n-1} - 2n - \frac{9}{2} \\
 &= 2^{n-1} \left\{ 9 + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} \right\} - 2n - \frac{13}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n d_k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n c_k \\
 &= 9 \cdot 2^{n-2} - n - \frac{9}{4} - \frac{1}{12} \{1 - (-2)^n\} \\
 &= 2^{n-2} \left\{ 9 + \frac{1}{3}(-1)^n \right\} - n - \frac{7}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

(5) 数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 4$ の時

$$\text{左辺} = 2^4 = 16$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \quad \text{より 左辺} > \text{右辺} \text{で成立.}$$

(ii) $k \geq 4$ なる $n = k$ の時, $2^k > \frac{k(k-1)}{2}$ が成立すると仮定.

$n = k+1$ の時の $2^{k+1} > \frac{(k+1)k}{2}$ が成り立つ事を示す.

$$\begin{aligned}
 2^{k+1} - \frac{k(k+1)}{2} &> 2 \cdot \frac{k(k-1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \frac{k}{2} (2k - 2 - k - 1) \\
 &= \frac{k}{2} (k - 3) > 0 \quad (\because k \geq 4)
 \end{aligned}$$

よって, $n = k+1$ の時にも成立.

(i), (ii) より, $n \geq 4$ において, $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$ は成立する.

また, $n = 1$ の時,

$$\text{左辺} = 2^1 = 2, \text{右辺} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \text{ より, 左辺} > \text{右辺} \text{で成立.}$$

$n = 2$ の時,

$$\text{左辺} = 2^2 = 4, \text{右辺} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ より, 左辺} > \text{右辺} \text{で成立.}$$

$n = 3$ の時,

$$\text{左辺} = 2^3 = 8, \text{右辺} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ より, 左辺} > \text{右辺} \text{で成立.}$$

以上より, すべての自然数 n で

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{は成立することが示された.}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} \left\{ 9 + \frac{1}{3}(-1)^{2n+1} \right\} - 4n - \frac{13}{3}}{2^{2n-2} \left\{ 9 + \frac{1}{3}(-1)^{2n} \right\} - 2n - \frac{7}{3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13 \cdot 4^n - 12n - 13}{7 \cdot 4^n - 6n - 7} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13 - \frac{12}{2^n} \cdot \frac{n}{2^n} - \frac{13}{4^n}}{7 - \frac{6}{2^n} \cdot \frac{n}{2^n} - \frac{7}{4^n}} \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

ここで, $n \geq 2$ の自然数の時, (5) の逆数をとって,

$$\begin{aligned}
 0 &< \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n(n-1)} \\
 \therefore 0 &< \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n-1}
 \end{aligned}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = 0$ より, はさみうちの原理から, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$

これを①に適用して

$$\frac{13}{7} \quad (\text{答})$$

(1) 極値をとる $x: \frac{-1+\sqrt{10}}{3}, \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$

変曲点: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$ (答)

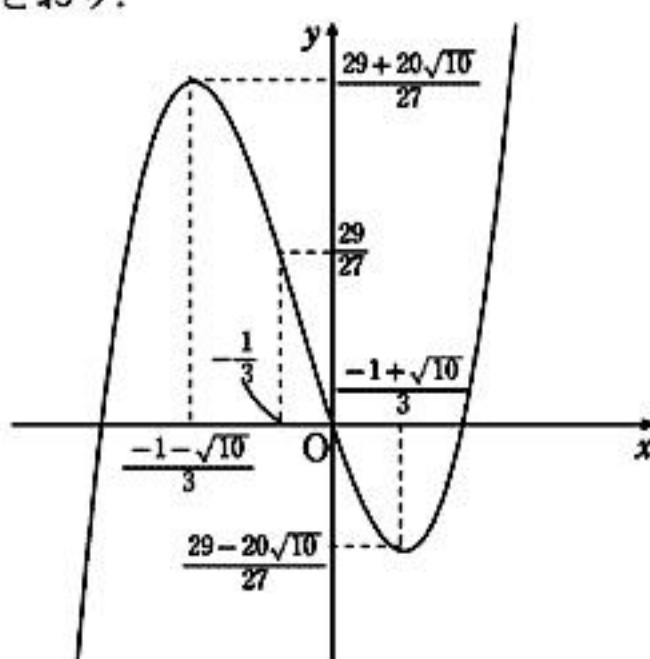
(2) 増減表は以下の通り.

x		$\frac{-1-\sqrt{10}}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{10}}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$							

また, $f\left(\frac{-1-\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{29+20\sqrt{10}}{27}$

$f\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{29-20\sqrt{10}}{27}$

よって, グラフは以下のとおり.



(3) $f(x) = f\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}\right)$ となる $x = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$ 以外の点は,

$\frac{-1+\sqrt{10}}{3} = \alpha$ とおくと, $f'(\alpha) = 0$ を利用して,

$$x^3 + x^2 - 3x = \alpha^3 + \alpha^2 - 3\alpha$$

$$(x-\alpha)(x^2 + x(\alpha+1) + \alpha^2 + \alpha - 3) = 0$$

$$(x-\alpha)^2(x+2\alpha+1) = 0 \text{ より, } x = -2\alpha - 1 = \frac{-1+2\sqrt{10}}{3}$$

同様に $f(x) = f\left(\frac{-1-\sqrt{10}}{3}\right)$ となる $x = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$ 以外の点は,

$\frac{-1-\sqrt{10}}{3} = \beta$ とおくと, $f'(\beta) = 0$ を利用して,

$$x^3 + x^2 - 3x = \beta^3 + \beta^2 - 3\beta$$

$$(x-\beta)^2(x+2\beta+1) = 0 \text{ より, } x = -2\beta - 1 = \frac{-1-2\sqrt{10}}{3}$$

よって, 異なる3点で交わる条件は,

$$\frac{-1-2\sqrt{10}}{3} < s < \frac{-1+2\sqrt{10}}{3}$$

(4) $QR:RS = p-a:b-p = 2:1$ より

$$2b-2p = p-a$$

$$a+2b = 3p \dots \textcircled{1}$$

また, $y = f(x)$ と $y = f(p)$ の交点が, a, p, b だから,

$$f(x) - f(p) = (x-a)(x-p)(x-b)$$

$$\therefore x^3 + x^2 - 3x - p^3 - p^2 + 3p = (x-a)(x-p)(x-b)$$

$$(x-p)\{x^2 + (p+1)x + p^2 + p - 3\} = (x-p)(x-a)(x-b)$$

つまり, 2次方程式 $x^2 + (p+1)x + p^2 + p - 3 = 0$ の2解が, a, b となる

ので, 解と係数の関係から

$$a+b = -p-1 \dots \textcircled{2}$$

$$ab = p^2 + p - 3 \dots \textcircled{3}$$

①~③ および $a < p < b$ より

$$p = \frac{-7+\sqrt{70}}{21}$$

$$a = \frac{-7-5\sqrt{70}}{21}$$

$$b = \frac{-7+4\sqrt{70}}{21}$$

(答) $p = \frac{-7+\sqrt{70}}{21}$

(5) $a = -5p-2, b = 4p+1$ だから

$$\int_a^b (f(x) - f(p)) dx$$

$$= \int_{-5p-2}^{4p+1} (x^3 + x^2 - 3x - p^3 - p^2 + 3p) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + (-p^3 - p^2 + 3p)x \right]_{-5p-2}^{4p+1}$$

$$= \frac{1}{4}(4p+1)^4 + \frac{1}{3}(4p+1)^3 - \frac{3}{2}(4p+1)^2 + (-p^3 - p^2 + 3p)(4p+1)$$

$$- \frac{1}{4}(-5p-2)^4 - \frac{1}{3}(-5p-2)^3 + \frac{3}{2}(-5p-2)^2 - (-p^3 - p^2 + 3p)(-5p-2)$$

$$= (9p+3) \left\{ \frac{3}{4}(27p^3 + 27p^2 + 9p + 1) \right\}$$

$$= \frac{9}{4}(3p+1)^4$$

$$= \frac{9}{4} \left(-1 + \frac{\sqrt{70}}{7} + 1 \right)^4$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{70 \times 70}{7^4} = \frac{225}{49} \quad (\text{答})$$