

(1) 原点を O とおくと

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

ゆえに、点 B の座標は $(0, \sin \theta)$ なので、求めるべき直線 l の方程式は

$$\frac{x}{\cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} = 1 \dots\dots(\text{答})$$

(2) 直線 l の方程式は(1)の結果より

$$(\sin \theta)x + (\cos \theta)y - \sin \theta \cos \theta = 0$$

点と直線の距離の公式より

$$h = \frac{|a \sin \theta + a \cos \theta - \sin \theta \cos \theta|}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = |a(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta|$$

ここで、 $a > 1$ かつ $0 < \cos \theta < 1$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) より

$$a(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta > \cos \theta(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta = \cos^2 \theta > 0$$

したがって $\underline{h = a(\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta} \dots\dots(\text{答})$

(3) $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと $t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{4} < \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{3}{4}\pi$ なので、 $1 < t \leq \sqrt{2}$

$$t^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \quad \text{より} \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

ゆえに、 $h = f(t)$ とおくと

$$f(t) = at - \frac{t^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}(t - a)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + 1)$$

$1 < t \leq \sqrt{2}$ の条件を考慮すると

$1 < a < \sqrt{2}$ のとき、 $h = f(t)$ は $t = a$ において最大値 $f(a) = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ をとり、
 $\sqrt{2} \leq a$ のとき、 $h = f(t)$ は $t = \sqrt{2}$ において最大値 $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}a - \frac{1}{2}$ をとる。

(答)

(1)

(a) $y = x - \frac{1}{4x}$ ($x > 0$) とおくと

$$4x^2 - 4yx - 1 = 0 \iff 4 \left(x - \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{y^2 + 1} - y}{2} \right) = 0$$

$$x > 0, \quad y < \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{より} \quad x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{2}$$

したがって、 $f(x)$ ($x > 0$) の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2} (= g(x)) \text{ となる。} \quad (\text{証明終})$$

$$(b) \quad h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \dots (\text{答})$$

(c) (b)の結果より

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int h'(x) dx = h(x) + C_1 = \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2} \right) + C_1$$

(C_1 : 積分定数)

ここで、 $C_1 - \log 2$ を改めて C_2 とおくと、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C_2 \quad (C_2 : \text{積分定数}) \dots\dots (\text{答})$$

(d)

$$p'(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(x^2 + 1) - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{ゆえに } \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(p'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \left(p'(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx = \frac{1}{2} \left(p(x) + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \} + C_3 \quad (C_3 : \text{積分定数}) \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)

(a) $x^2 - y^2 = 1$ において、 $y = t$ とおくと

$$x^2 - t^2 = 1 \iff x^2 = t^2 + 1 \quad \therefore x = \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

双曲線 C と直線 $y = t$ の交点の座標が $(\pm \sqrt{t^2 + 1}, t)$ であることから、2 交点間の距離は

$$\sqrt{t^2 + 1} - (-\sqrt{t^2 + 1}) = 2\sqrt{t^2 + 1} \dots\dots (\text{答})$$

(b) 図形 D が x 軸に関して対称であることを考慮して

$$V = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \int_0^b (y^2 + 1) dy = 2\pi \left[\frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^b = 2\pi \left(\frac{b^3}{3} + b \right) \dots\dots (\text{答})$$

(c) 図形 D が x 軸及び y 軸に関して対称であることを考慮して

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^b x dy = 4 \int_0^b \sqrt{y^2 + 1} dy = 4 \left[\frac{1}{2} \{ y\sqrt{y^2 + 1} + \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \} \right]_0^b \\ &= 2 \{ b\sqrt{b^2 + 1} + \log(b + \sqrt{b^2 + 1}) \} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(d) (c) \text{の結果より} \quad \frac{S}{b^2} = 2 \left\{ \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b} + \frac{\log(b + \sqrt{b^2 + 1})}{b^2} \right\}$$

$$\text{ここで、} b > 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b} = \sqrt{\frac{b^2 + 1}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} \text{ なので}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} = 1 \quad \dots\dots ①$$

以下、 $b > 0$ の条件下についてのみ考える。

$$b + \sqrt{b^2 + 1} = x \text{ とおくと、} b > 0 \text{ より } x > 1$$

$$\text{ゆえに } \log(b + \sqrt{b^2 + 1}) > \log 1 = 0 \dots\dots ②$$

$$\text{関数 } f \text{ を } f(x) = x - 1 - \log x \text{ で定義すると、} f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

この関数が $x > 1$ で $f'(x) > 0$ となることから $x > 1$ の条件下において以下の不等式が成立する。

$$f(x) > f(1) = 1 - 1 - \log 1 = 0$$

$$\therefore \log x < x - 1$$

$$x = b + \sqrt{b^2 + 1} \text{ を代入して}$$

$$\log(b + \sqrt{b^2 + 1}) < b + \sqrt{b^2 + 1} - 1 \dots\dots ③$$

②と③より

$$0 < \frac{\log(b + \sqrt{b^2 + 1})}{b^2} < \frac{b + \sqrt{b^2 + 1} - 1}{b^2} = \frac{1}{b} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} - \frac{1}{b} \right) = 0$$

より、はさみうちの原理から

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\log(b + \sqrt{b^2 + 1})}{b^2} = 0 \dots\dots ④$$

①と④より、

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{S}{b^2} = 2 \dots\dots (\text{答})$$