1

(1)

アイウエ	2590
オカキク	1120

(2)

ケコ	3,5
サシ	1,5
スセソタチ	5,3,6,1,2
ツテトナニ	5,2,6,1,3
ヌネノハ	0,0,0,0
ヒフ	1,6

(3)

ヘホマ	1,1,3
ミムメモ	9,2,6,4

$\boxed{2}$

(1) $I=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-x}\sin 2x\,dx$

$=\left[e^{-x}\sin 2x\right]_{\alpha}^{\beta}+2\int_{\alpha}^{\beta}e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=-e^{-\beta}\sin 2\beta+e^{-\alpha}\sin 2\alpha+2J$

$\therefore\ I-2J=e^{-\alpha}\sin 2\alpha-e^{-\beta}\sin 2\beta\cdots$①

$J=\int_{\alpha}^{\beta}e^{-x}\cos 2x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\cos 2x\right]_{\alpha}^{\beta}-2\int_{\alpha}^{\beta}e^{-x}\sin 2x\,dx$

$=-e^{-\beta}\cos 2\beta+e^{-\alpha}\cos 2\alpha+2I$

$\therefore\ 2I+J=e^{-\alpha}\cos 2\alpha-e^{-\beta}\cos 2\beta\cdots$②

①, ②より

$I=\frac{1}{5}e^{-\alpha}(\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha)-\frac{1}{5}e^{-\beta}(\sin 2\beta+2\cos 2\beta)$

$J=-\frac{1}{5}e^{-\alpha}(2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)+\frac{1}{5}e^{-\beta}(2\sin 2\beta-\cos 2\beta)$

(2) $e^{-x}=e^{-x}\sin 2x$

$e^{-x}(1-\sin 2x)=0$

$\sin 2x=1$

$\therefore 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi(n-1)$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi(n-1)$　　　よって, $a_n=-\frac{3}{4}\pi+n\pi$

(3) $S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}e^{-x}-e^{-x}\sin 2x\,dx$

$=\int_{a_n}^{a_{n+1}}e^{-x}dx-\int_{a_n}^{a_{n+1}}e^{-x}\sin 2x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\right]_{a_n}^{a_{n+1}}-\left[-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)\right]_{a_n}^{a_{n+1}}$

$=-e^{-a_{n+1}}+e^{-a_n}+\frac{1}{5}e^{-a_{n+1}}(\sin 2a_{n+1}+2\cos 2a_{n+1})$

$-\frac{1}{5}e^{-a_n}(\sin 2a_n+2\cos 2a_n)\cdots$③

ここで, $\sin 2a_n=\sin\left(-\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)=1$

$\sin 2a_{n+1}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$

$\cos 2a_n=\cos\left(-\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)=0$

$\cos 2a_{n+1}=\mathrm{cosn}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$　より

③式 $\Longleftrightarrow$　$-e^{-\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}+e^{-\left(-\frac{3}{4}\pi+n\pi\right)}+\frac{1}{5}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}-\frac{1}{5}e^{-\left(-\frac{3}{4}\pi+n\pi\right)}$

$=\left(\frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{4}\pi}\right)e^{-n\pi}$

$\left(=\frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}(1-e^{-\pi})e^{-n\pi}\right)$

(4) $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}S_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{3}{4}\pi}(e^{-\pi}-1)(-e^{-\pi})^n$

$=\frac{1}{1-(-e^{-\pi})}\cdot\frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}(e^{-\pi}-1)\cdot(-e^{-\pi})$

$=\frac{1}{1+e^{-\pi}}\cdot\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{4}\pi}(1-e^{-\pi})$

$=\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}+1}\cdot\frac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}}\cdot\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{4}\pi}$

$=\frac{4e^{-\frac{1}{4}\pi}(e^{\pi}-1)}{5(e^{\pi}+1)}$

3

(1) 点 E の y 座標を y とおくと，$E(0, y, \sqrt{3}t)$ であり，

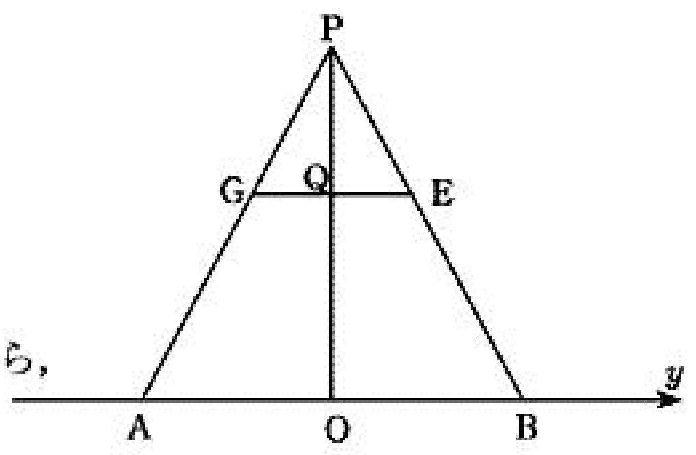
$QE = y$，$\triangle PQE \backsim \triangle POB$ より

$PQ:PO = QE:OB$

$3\sqrt{3} - \sqrt{3}t : 3\sqrt{3} = y : 1$

$3\sqrt{3}y = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}t$

$y = 1 - \dfrac{1}{3}t$



E と G は xz 平面について対称だから，

点E $\left(0, 1 - \dfrac{1}{3}t, \sqrt{3}t\right)$

点G $\left(0, -1 + \dfrac{1}{3}t, \sqrt{3}t\right)$

また $EG = 2 - \dfrac{2}{3}t$，$AQ = \sqrt{1+3t^2}$ より

$$\triangle AEG = \left(2 - \frac{2}{3}t\right) \cdot \sqrt{1+3t^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3-t}{3}\sqrt{1+3t^2}$$

(2) $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ であり，点 F は PC 上にあるから

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + l\,\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ -3\sqrt{3}l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 3\sqrt{3}(1-l) \end{pmatrix}$$ とできる．

また，F は AQ 上にあり，

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3}t \end{pmatrix}$ だから，

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ \sqrt{3}tk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ \sqrt{3}tk \end{pmatrix}$$ とできる．

よって，$\begin{cases} 1-k = -l \\ \sqrt{3}tk = 3\sqrt{3}(1-l) \end{cases}$ より，$l = \dfrac{3-t}{3+t}$

したがって 点 F $\left(\dfrac{t-3}{t+3}, 0, \dfrac{6\sqrt{3}t}{3+t}\right)$

また

$$\left|\overrightarrow{QF}\right| = \sqrt{\left(\frac{t-3}{t+3}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}t}{t+3} - \sqrt{3}t\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{t-3}{t+3}\right)^2 + 3t^2\left(\frac{t-3}{t+3}\right)^2}$$
$$= \left|\frac{t-3}{t+3}\right|\sqrt{1+3t^2}$$
$$= \frac{3-t}{3+t}\sqrt{1+3t^2} \quad (0 \leqq t < 3 \text{ より})$$

$\left|\overrightarrow{EG}\right| = 2 - \dfrac{2}{3}t$ だから

$$\triangle EFG = \left|\overrightarrow{EG}\right| \times \left|\overrightarrow{QF}\right| \times \frac{1}{2} = \left(2 - \frac{2}{3}t\right) \times \frac{3-t}{3+t}\sqrt{1+3t^2} \times \frac{1}{2} = \frac{(3-t)^2}{3(3+t)}\sqrt{1+3t^2}$$

(3) (1)より

$$\triangle AEG = \frac{3-t}{3}\sqrt{1+3t^2}$$

だから

$$S(t) = \triangle EFG + \triangle AEG$$
$$= \frac{(3-t)^2}{3(3+t)}\sqrt{1+3t^2} + \frac{3-t}{3}\sqrt{1+3t^2}$$
$$= \frac{3-t}{3}\sqrt{1+3t^2}\left(\frac{3-t+3+t}{3+t}\right)$$
$$= \frac{2(3-t)}{3+t}\sqrt{1+3t^2}$$

また

$$\log S(t) = \log 2 + \log(3-t) - \log(3+t) + \frac{1}{2}\log(1+3t^2)$$

より

$$\frac{d\log S(t)}{dt} = \frac{-1}{3-t} - \frac{1}{3+t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6t}{1+3t^2}$$
$$= \frac{-(3+t)(1+3t^2) - (3-t)(1+3t^2) + 3t(9-t^2)}{(1+3t^2)(3+t)(3-t)}$$
$$= \frac{-(3+9t^2+t+3t^3) - (3+9t^2-t-3t^3) + 27t - 3t^3}{(1+3t^2)(3+t)(3-t)}$$
$$= \frac{-3t^3 - 18t^2 + 27t - 6}{(1+3t^2)(3+t)(3-t)}$$
$$= \frac{-3(t-1)(t^2+7t-2)}{(1+3t^2)(3+t)(3-t)}$$

(4) $\dfrac{d}{dt}\log S(t) = 0$ となる t で，$0 \leqq t < 3$ のものは

$t = 1,\ t = \dfrac{-7+\sqrt{57}}{2}$

よって $0 \leqq t < 3$ で増減表は以下のとおり

t	0		$\frac{-7+\sqrt{57}}{2}$		1		3
$\frac{d}{dt}\log S(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\log S(t)$	$\log 2$	↘		↗	$\log 2$	↘	

よって，$t = 0$ または 1 のとき，$\log S(t)$ は最大値 $\log 2$ をとる．すなわち $t = 0$ または 1 のとき，$S(t)$ は最大値 2 をとる．