

①

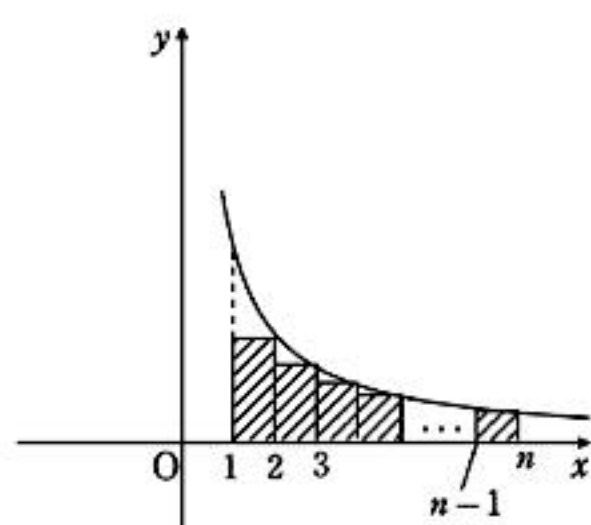
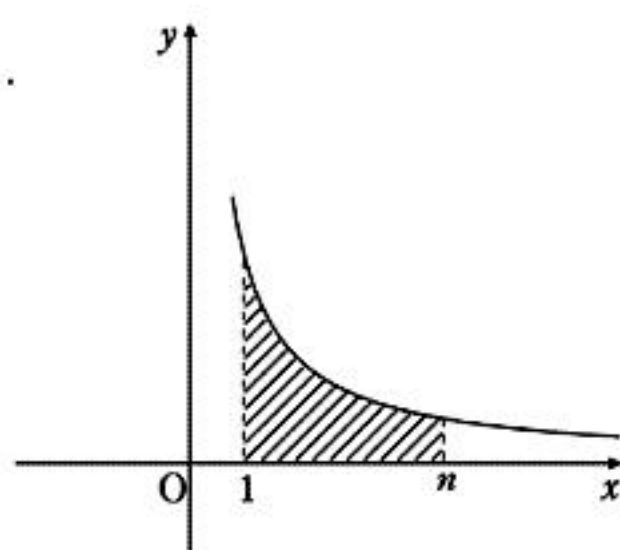
(1) $y = \frac{1}{x}$ を区間 $1 \leq x \leq n$ で区分求積することを考える.

$y' = -\frac{1}{x^2}$ より, $y = \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で単調減少である.

$y = \frac{1}{x}$ と x 軸, $x=1$, $x=n$ で囲まれた面積は,

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^n = \log n \text{ である.}$$

$1 \leq x \leq n$ を $n-1$ 等分して



$2 \leq k \leq n$ に対して, 幅 1, 高さ $\frac{1}{k}$ の長方形の

$k=2$ から $k=n$ までの和, つまり,

$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ は, その領域が $y = \frac{1}{x}$ の下側に含まれるため

$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{1}{x} dx$, つまり,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log n \dots \textcircled{1}$$

となる.

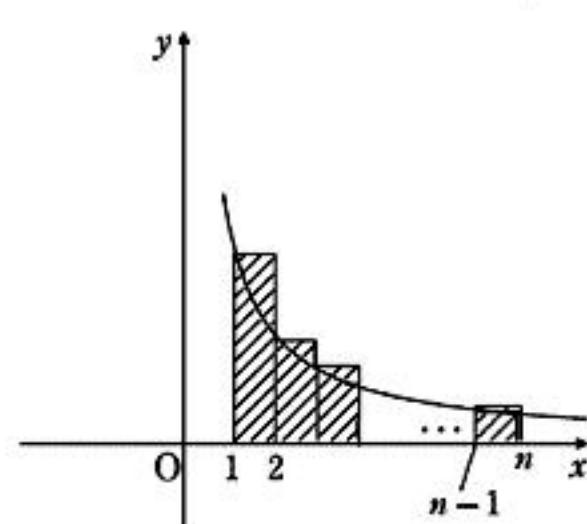
また, $1 \leq x \leq n$ を $n-1$ 等分して, $1 \leq k \leq n-1$ に対して, 幅 1, 高さ $\frac{1}{k}$ の長方形の

$k=1$ から $k=n-1$ までの和, つまり, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ は, $y = \frac{1}{x}$ が単調減少であることから,

$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{1}{x} dx$, つまり,

$$\log n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ.



①②より,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \text{ が示された.}$$

(2) $n=8$ の時, 実際に数え上げると,

$$(a) \sum_{k=1}^8 a_k = 8 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$$

$$\sum_{k=1}^8 b_k = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 4 = 20$$

(b) a_k と n の間には, $0 \leq m < k$ である整数 m を用いて,

$$a_k \cdot k + m = n,$$

$$a_k = \frac{n}{k} - \frac{m}{k} \quad \text{の関係がある.}$$

ここで, $0 \leq m < k$ より,

$$-k < -m \leq 0$$

$$-1 < -\frac{m}{k} \leq 0$$

$$-1 + \frac{n}{k} < \frac{n}{k} - \frac{m}{k} \leq \frac{n}{k}$$

すなわち, $\frac{n}{k} - 1 < a_k \leq \frac{n}{k}$ となり, 題意は示された.

(c) k の倍数である $k, 2k, 3k \dots < n$ は, それぞれ, $k, 2k, 3k$ の約数であるので, その総和は等しい.

$$\text{よって, } \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_k$$

(d) $\left| \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) - \log n \right| < 1$ は (c) より,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \log n \right| < 1 \text{ とできるので,}$$

$$-1 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \log n \text{ および } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \log n < 1 \text{ を示せばよい.}$$

前者について, (b) より,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{a_k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) < \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで, (1) より, } \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

だから,

$$\log n - 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{これと①より, } \log n - 1 < \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n}$$

$$-1 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \log n \quad \text{よって示された.}$$

また, 後者について, (b) より,

$$\frac{a_k}{n} \leq \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \dots \textcircled{2}$$

ここで, (1) より

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log n \text{ だから,}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log n + 1$$

これと②より,

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} < \log n + 1$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \log n < 1 \quad \text{よって示された.}$$

以上より

$$\left| \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) - \log n \right| < 1 \quad \text{が示された.}$$

2

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots ①$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots ②$$

$$① + ② \text{より, } \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\text{ここで, } \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ とおくと, } \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \text{ より}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

また,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots ③$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots ④$$

$$③ + ④ \text{より, } \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\text{ここで, } \alpha + \beta = A, \alpha - \beta = B \text{ とおくと, } \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2} \text{ より}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$(2) (\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x)$$

$$= (\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x)$$

$$2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x$$

$$\cos x (\cos 3x + \cos 2x) - \cos x (\sin 3x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \cos x \left(\cos \frac{5}{2}x \cos \frac{1}{2}x - \sin \frac{5}{2}x \cos \frac{1}{2}x \right) = 0$$

$$\cos x \cos \frac{1}{2}x \left(\cos \frac{5}{2}x - \sin \frac{5}{2}x \right) = 0$$

よって

$$\cos x = 0 \text{ または } \cos \frac{1}{2}x = 0 \text{ または } \cos \frac{5}{2}x = \sin \frac{5}{2}x$$

$$\text{ここで, } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ より, } 0 \leq \frac{1}{2}x \leq \pi, 0 \leq \frac{5}{2}x \leq 5\pi \text{ に注意すると}$$

$$\cos x = 0 \text{ より, } x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos \frac{1}{2}x = 0 \text{ より, } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi \therefore x = \pi$$

$$\cos \frac{5}{2}x = \sin \frac{5}{2}x \text{ より,}$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{4}, \frac{9}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi$$

$$x = \frac{1}{10}\pi, \frac{9}{10}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

以上より,

$$(\text{答}) \frac{1}{10}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{9}{10}\pi, \pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

$$(3) f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot 3 \cos 3x - \frac{1}{3} \cdot 3 \sin 3x + \frac{1}{4} \cdot 4 \cos 4x - \frac{1}{4} \cdot 4 \sin 4x$$

$$= (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x)$$

$$- (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x)$$

$$= 4 \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{5}{2}x - \sin \frac{5}{2}x \right)$$

よって, $f'(x) = 0$ となる x は, (2) より

$$x = \frac{1}{10}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{9}{10}\pi, \pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ の前後では } f'(x) \text{ の符号は変らないから}$$

増減表は以下のとおり.

x	0		$\frac{\pi}{10}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{9}{10}\pi$		π		$\frac{13}{10}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{17}{10}\pi$		2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$			極大				極小		極大		極小		極大		極小		

以上より,

$$(\text{答}) \text{極大: } x = \frac{\pi}{10}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{極小: } x = \frac{9}{10}\pi, \frac{13}{10}\pi, \frac{17}{10}\pi$$

$$\text{最大: } x = \frac{\pi}{10}$$

$$\text{極大値 } f(\pi) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ は}$$

$$f(0) = f(2\pi) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \text{ より小}$$

$$\text{増減表より } f(0) < f\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ であるから}$$

$$x = \frac{\pi}{10} \text{ で } f(x) \text{ は最大となる.}$$