

(1)	(a)	ア	1
		イ	5
		ウ	5
	(b)	エ	1
		オ	0
		カ	4
	(c)	キ	1
		ク	2
		ケ	4
		コ	7
		サ	1
	シ	2	
(2)	(a)	ア	5
		イ	3
		ウ	9
	(b)	エ	1
		オ	4
	(c)	カ	7
		キ	4
		ク	3
		ケ	4

(3)	(a)	ア	2
		イ	1
		ウ	4
	(b)	エ	3
		オ	2
		カ	2
		キ	2
	(c)	ク	9
		ケ	2
		コ	3
		サ	7
		シ	2
		ス	7
		セ	2
		ソ	2
		タ	4
		チ	1
	(d)	ツ	2

$$(1) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{1+x}} \quad (x > 0)$$

$x > 0$ より $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} > 0$ なので、両辺の自然対数をとると

$$\log f(x) = \frac{1}{1+x} \log(1+x)$$

両辺 x で微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\log(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} = \{1 - \log(1+x)\}(1+x)^{-2}$$

したがって $f'(x) = \{1 - \log(1+x)\}(1+x)^{-2} f(x)$ より

$$f'(x) = \{1 - \log(1+x)\}(1+x)^{-\frac{1+2x}{1+x}} \dots\dots(\text{答})$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $(1+x)^{-\frac{1+2x}{1+x}} \neq 0$ より $1 - \log(1+x) = 0 \iff 1+x = e$

$$\therefore x = e - 1$$

したがって $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = e - 1 \dots\dots(\text{答})$

(2) 円 $x^2 + y^2 = 2$ と放物線 $x = y^2$ の交点の x 座標は

$$x^2 + x = 2 \iff (x+2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x = y^2 \geq 0 \text{ より})$$

したがって、円 $x^2 + y^2 = 2$ と放物線 $x = y^2$ の交点は $A(1,1)$ と $B(1,-1)$ の2点であり、

連立不等式 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ x \geq y^2 \end{cases}$ が表す領域は下図の斜線部となる (境界はすべて含む)。

求めるべき面積を S とおくと

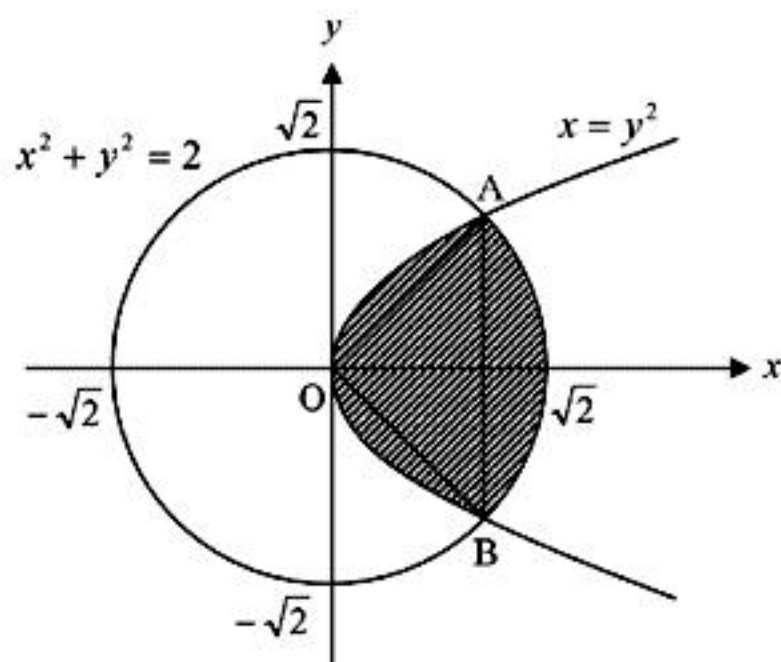
$S = (\text{放物線 } x = y^2 \text{ と直線 } AB \text{ で囲まれた領域の面積}) + (\text{四分円 } OAB \text{ の面積}) - (\angle OAB \text{ の面積})$ より

$$S = \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy + \frac{1}{4} \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot \{1 - (-1)\} \cdot 1$$

$$= \int_{-1}^1 (1 - y)(1 + y) dy + \frac{1}{2} \pi - 1$$

$$= \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 + \frac{1}{2} \pi - 1$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}}} \dots\dots(\text{答})$$



(1) $x > 0, y > 0$ の条件下において、 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ の両辺を x で微分して

$$\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9} \cdot y' = 0 \quad \therefore y' = -\frac{9x}{4y}$$

接線 l_1 の傾きが $-\frac{9x_1}{4y_1}$ であることから、 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1$ であることを考慮して、 l_1 の方程式は

$$y = -\frac{9x_1}{4y_1}(x - x_1) + y_1 \iff \underline{y = -\frac{9x_1}{4y_1}x + \frac{9}{y_1}} \dots\dots(\text{答})$$

法線 l_2 の傾きは $\frac{4y_1}{9x_1}$ なので、 l_2 の方程式は

$$y = \frac{4y_1}{9x_1}(x - x_1) + y_1 \iff \underline{y = \frac{4y_1}{9x_1}x + \frac{5}{9}y_1} \dots\dots(\text{答})$$

(2) Q の x 座標は、 l_1 の方程式に $y = 0$ を代入することで $x = \frac{4}{x_1}$

S の x 座標は、 l_2 の方程式に $y = 0$ を代入することで $x = -\frac{5}{4}x_1$

$$\therefore \text{SQ} = \frac{4}{x_1} - \left(-\frac{5}{4}x_1\right) = \frac{4}{x_1} + \frac{5}{4}x_1$$

$x_1 > 0$ より $\frac{4}{x_1} > 0, \frac{5}{4}x_1 > 0$ なので、相加・相乗平均の関係から

$$\text{SQ} = \frac{4}{x_1} + \frac{5}{4}x_1 \geq 2\sqrt{\frac{4}{x_1} \cdot \frac{5}{4}x_1} = 2\sqrt{5}$$

等号成立は、 $\frac{4}{x_1} = \frac{5}{4}x_1$, $x_1 > 0$ より $x_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ のときである。

このとき、 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1$, $y_1 > 0$ より $y_1 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ となる。

したがって、求めるべき面積は

$$\triangle \text{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot \text{SQ} \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \underline{3} \dots\dots(\text{答})$$

(3) R の y 座標は、 l_2 の方程式に $x = 0$ を代入することで $y = \frac{5}{9}y_1$

$$\therefore \triangle \text{OSR} = \frac{1}{2} \cdot \text{OS} \cdot \text{OR} = \frac{1}{2} \cdot \left\{0 - \left(-\frac{5}{4}x_1\right)\right\} \cdot \frac{5}{9}y_1 = \frac{25}{72}x_1y_1$$

$k = x_1y_1$ とおくと、 $x_1 > 0, y_1 > 0$ より $k > 0$ であり、 $y_1 = \frac{k}{x_1}$

関数 $y = \frac{k}{x}$ のグラフが反比例のグラフであることから、

k が最大値をとるのは右図のように、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

と関数 $y = \frac{k}{x}$ が接するときである。

このとき

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{k}{x_1}\right)^2 = 1$$

$$\iff 9x_1^4 - 36x_1^2 + 4k^2 = 0$$

$X = x_1^2$ とおくと、

$$9X^2 - 36X + 4k^2 = 0$$

X は実数解を 1 つだけもつので、上式の判別式を D とおくと $k > 0$ を考慮して

$$\frac{D}{4} = 18^2 - 9 \cdot 4k^2 = 0 \quad \therefore k = 3$$

したがって、求めるべき面積は

$$\triangle \text{OSR} = \frac{25}{72} \cdot 3 = \frac{25}{24} \dots\dots(\text{答})$$

