

(1)	(a)	ア	1
		イ	2
		ウ	1
		エ	1
	(b)	オ	0
		カ	1
		キ	4
		ク	3
	(c)	ケ	3
		コ	4
		サ	1
		シ	3
		ス	4
(2)	(a)	ア	9
	(b)	イ	1
		ウ	2
	(c)	エ	6
		オ	8

(3)	(a)	ア	1
		イ	1
		ウ	6
	(b)	エ	1
		オ	2
		カ	1
	(c)	キ	5
		ク	8
		ケ	1
		コ	4
		サ	3
	(d)	シ	8
		ス	1
		セ	1
		ソ	2
		タ	8
		チ	9
		ツ	3
		テ	5
		ト	3
		ナ	5
		ニ	0

(1)

(a) $\overline{p \text{かつ} q} \iff \bar{p} \text{または} \bar{q}$ なので、条件「 $p \text{かつ} q$ 」の否定は、「行列 A は逆行列をもたない、または、 $a < 0$ である」……(答)(b) $p \iff \det A = a^2 - 4 \cdot 1 \neq 0 \iff \underline{a \neq \pm 2}$ ……(答) (ただし、 $\det A$ は A の行列式を表す。)このとき A の逆行列は

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 4} \begin{pmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{pmatrix}} \dots\dots(\text{答})$$

(c) 正しい記述は②である。……(答)

【理由】

(i) p が成立するとき、 A は逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 4} \begin{pmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ をもつ。

このとき、連立1次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \dots\dots \textcircled{1}$$

の両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\begin{aligned} A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - 4} \begin{pmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a - 2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、①は解を持つので、命題「 $p \implies r$ 」は真である。(ii) $a = -2$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff x - 2y + 1 = 0$$

よって、①は任意の定数 k を用いて、

$$x = 2k - 1, y = k$$

なる解を持つ。ゆえに、 r が成立する。一方 $a = -2$ のときは、 $p \iff \det A = a^2 - 4 \cdot 1 = 0$ となり A は逆行列をもたない。したがって、命題「 $r \implies p$ 」は偽である。

以上の(i)と(ii)より、

② 「条件 p は条件 r が成り立つための十分条件であるが、必要条件ではない」が正しい。
(証明終)

(2)

(a) 曲線 $y = 3^x - 1$ と直線 $y = 2x + 4$ の第一象限での交点は(2,8)なので、

求めるべきDの面積Sは

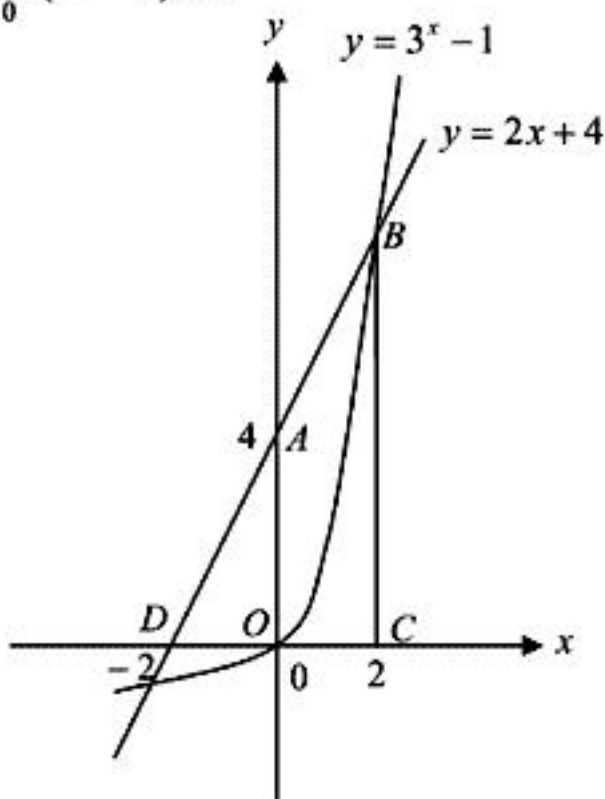
$$S = \int_0^2 \{(2x + 4) - (3^x - 1)\} dx = \int_0^2 (2x - 3^x + 5) dx = \left[x^2 - \frac{3^x}{\log 3} + 5x \right]_0^2 = 14 - \frac{8}{\log 3}$$

……(答)

(b) $A(0,4), B(2,8), C(2,0), D(-2,0)$ とし、原点を O とすると、求めるべき立体の体積 V は
 $V = (\text{台形 } OABC \text{ を } x \text{ 軸のまわりに回転させてできる立体の体積})$ − (曲線 $y = 3^x - 1$ と直線 $x = 2$ と x 軸で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積)

なので、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot (\pi \times 8^2) \times 4 - \frac{1}{3} \cdot (\pi \times 4^2) \times 2 - \pi \int_0^2 (3^x - 1)^2 dx \\ &= \frac{224}{3} \pi - \pi \int_0^2 (9^x - 2 \cdot 3^x + 1) dx \\ &= \frac{224}{3} \pi - \pi \left[\frac{9^x}{2 \log 3} - 2 \cdot \frac{3^x}{\log 3} + x \right]_0^2 \\ &= \underline{\pi \left(\frac{218}{3} - \frac{24}{\log 3} \right)} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{13} \dots\dots(\text{答})$$

(2) 辺 BC の中点を O とし、点 O を中心とする半径 OC の円と辺 AC との交点を H とおく。
点 P の軌跡は問題文の条件より、短い方の弧 HC 上である。

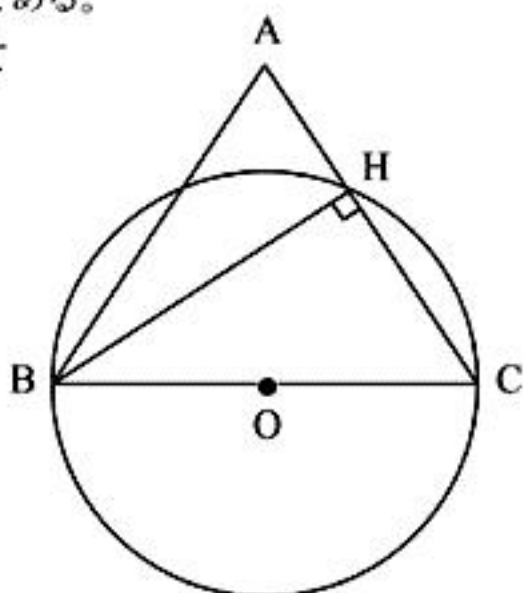
ただし、端点である H と C を含まない。したがって

$$\frac{AH}{AC} < \frac{AM}{AC} < \frac{AC}{AC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB \cdot \cos A}{\sqrt{13}} < t < 1$$

よって、 t の取りうる値の範囲は

$$\frac{5}{13} < t < 1 \dots\dots(\text{答})$$



(3) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおくと、

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{AM}{AC} \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\frac{BP}{BM} = k \text{ とおくと、 } \overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BM} \quad (\text{ただし } k > 1) \text{ なので}$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = (k-1)\vec{b} + (1-tk)\vec{c}$$

$$PC \perp BP \text{ より } \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad (\because \overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BM}, k > 1) \text{ なので}$$

$$\{(k-1)\vec{b} + (1-tk)\vec{c}\} \cdot (-\vec{b} + t\vec{c}) = 0$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{13}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 13 \cos A = 5 \text{ より上式から } k = \frac{8(t+1)}{13t^2 - 10t + 13}$$

したがって

$$\frac{BP}{BM} = \frac{8(t+1)}{13t^2 - 10t + 13} \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) t+1=s \text{ とおくと、 } \frac{5}{13} < t < 1 \text{ より } \frac{18}{13} < s < 2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$t = s-1$ より

$$\frac{BP}{BM} = \frac{8s}{13(s-1)^2 - 10(s-1) + 13} = \frac{1}{\frac{13}{8}s + \frac{9}{2s} - \frac{9}{2}}$$

①より $s > 0$ なので相加・相乗平均の関係から

$$\frac{BP}{BM} = \frac{1}{\frac{13}{8}s + \frac{9}{2s} - \frac{9}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{13}{8}s \cdot \frac{9}{2s}} - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

等号成立は

$$\frac{13}{8}s = \frac{9}{2s} \Leftrightarrow s = \frac{6\sqrt{13}}{13} \quad (\because s > 0 \text{ より}) \text{ のときで、これは①を満たす。}$$

したがって、 $\frac{BP}{BM}$ が最大となるときの t の値は

$$t = s - 1 = \frac{6\sqrt{13}}{13} - 1 \dots\dots(\text{答})$$