1

(1)

アイ	2,3
ウ	2
エオ	8,8
カ	4

(2)

キクケコサシス	9,8,12,6,8,9
セソタチツ	17,12,6
テ	6
トナニ	6,3,4

(3)

ヌネ	3,2
ノハ	3,8
ヒフヘホマミ	171,512

$\boxed{2}$

(1) $\log(a+1)=-\log(b+1)$

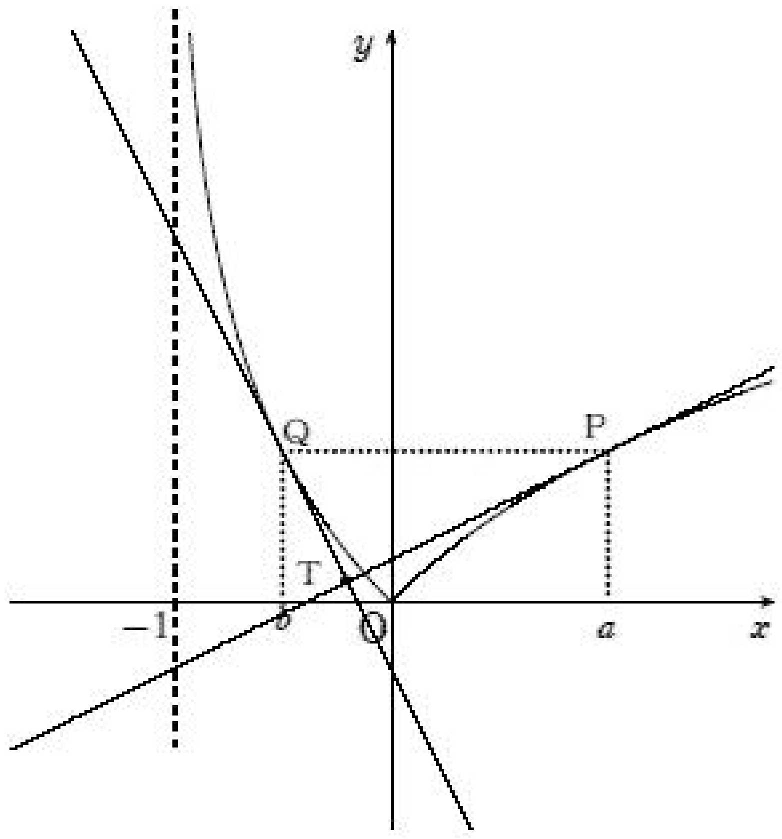
$$a+1=\frac{1}{b+1}$$

$$\therefore\ b+1=\frac{1}{a+1}$$

$$b=\frac{1}{a+1}-1$$

$$=-\frac{a}{a+1}$$

$$b=-\frac{a}{a+1}\quad\cdots(\text{答})$$



(2) P における接線は, $y'=\dfrac{1}{x+1}$ より

$$y=\frac{1}{a+1}(x-a)+\log(a+1)$$

$$=\frac{1}{a+1}x-\frac{a}{a+1}+\log(a+1)\cdots①$$

また, Q における接線は, $y'=-\dfrac{1}{x+1}$ より,

$$y=-\frac{1}{b+1}(x-b)-\log(b+1)$$

$$=-\frac{1}{b+1}x+\frac{b}{b+1}-\log(b+1)$$

$$=-(a+1)x+\frac{b}{b+1}-\log(b+1)\cdots②$$

ここで, ①と②の傾きから, ①, ②は直交することがわかる.

すなわち, PQ は, △PQT の外接円の直径であり, 中心は PQ の中点で

あるから, 半径は PQ の長さの $\dfrac{1}{2}$ となる.

よって, 半径は, $\dfrac{1}{2}(a-b)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{a}{a+1}\right)$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+2}{a+1}\quad \text{であるから,}$$

外接円の面積は,

$$\pi\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{a+2}{a+1}\right)^2=\frac{\pi a^2(a+2)^2}{4(a+1)^2}$$

(3) PQ と y 軸との交点を R とすると,

$$|\mathrm{PR}|-|\mathrm{RQ}|=|a|-|b|$$

$$=a+b$$

$$=a-\frac{a}{a+1}=\frac{a^2}{a+1}$$

$a>0$ より, $|\mathrm{PR}|-|\mathrm{RQ}|>0$ $\quad\therefore |\mathrm{PR}|>|\mathrm{RQ}|$ である.

よって, 求める面積は,

$$\int_0^{\log(a+1)}\pi x^2dy\cdots③$$

ここで, $y=\log(x+1)$ より, $x+1=e^y$ $\therefore$ $x=e^y-1$ だから,

$$③\Longleftrightarrow\int_0^{\log(a+1)}\pi\left(e^y-1\right)^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\log(a+1)}e^{2y}dy-2\pi\int_0^{\log(a+1)}e^ydy+\pi\int_0^{\log(a+1)}dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\log(a+1)}-2\pi\left[e^y\right]_0^{\log(a+1)}+\pi\log(a+1)$$

$$=\pi\left(\frac{(a+1)^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-2\pi(a+1-1)+\pi\log(a+1)$$

$$=\frac{\pi}{2}(a^2+2a)-2\pi a+\pi\log(a+1)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{a^2-2a+2\log(a+1)\right\}$$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V}{S}$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}\left\{a^2-2a+2\log(a+1)\right\}}{\frac{\pi a^2(a+2)^2}{4(a+1)^2}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi}{2}\left\{a^2-2a+2\log(a+1)\right\}\cdot\frac{4(a+1)^2}{\pi a^2(a+2)^2}$$

$$=\lim_{a\to\infty}2\cdot\frac{a^4+2a^2\log(a+1)-3a^2+4a\log(a+1)-2a+2\log(a+1)}{a^4+4a^3+4a^2}$$

$$=\lim_{a\to\infty}2\cdot\frac{1+\frac{2\log(a+1)}{a^2}-\frac{3}{a^2}+\frac{4\log(a+1)}{a^3}-\frac{2}{a^3}+\frac{2\log(a+1)}{a^4}}{1+\frac{a}{4}+\frac{4}{a^2}}$$

$$=2$$

(答) 2

$\boxed{3}$

(1) $y' = \dfrac{2}{d}x$ より，Pにおける接線の傾きは $\dfrac{2a}{d}$

法線の傾きを b とすると，$\dfrac{2a}{d}\cdot b = -1$ より，$b = -\dfrac{d}{2a}$ $(a \neq 0)$

また，$\dfrac{x^2}{d} = x$ 　　$\therefore$ $x(x-d) = 0$ より，Pは$(d\ ,\ d)$であるので，

$a = d$ を代入して，　　　(答) $-\dfrac{1}{2}$

(2) (1)より，$d-r : h = 2:1$

$\therefore$ $2h = d - r \cdots$ ①

また，$h : r = 1 : \sqrt{5}$

$\therefore$ $r = \sqrt{5}h$ 　$\cdots$ ②

①,②より，$h = \left(\sqrt{5}-2\right)d\ ,\ r = \left(5-2\sqrt{5}\right)d$

(3) $y = -\dfrac{h}{a}x + a + h$

$= -\dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)d}{d}x + d + \left(\sqrt{5}-2\right)d$

$= -\left(\sqrt{5}-2\right)x + \left(\sqrt{5}-1\right)d$

(4) (3)で求めた直線と，$f(x) = \dfrac{1}{d}x^2$ のP以外の交点は，

$\dfrac{1}{d}x^2 = -\left(\sqrt{5}-2\right)x + \left(\sqrt{5}-1\right)d$

$x^2 + \left(\sqrt{5}-2\right)dx - \left(\sqrt{5}-1\right)d^2 = 0$

$(x-d)(x-(1-\sqrt{5})d) = 0$

$x = (1-\sqrt{5})d$ より，$\left((1-\sqrt{5})d\ ,\ \dfrac{((1-\sqrt{5})d)^2}{d}\right)$

よって，

$S_1 = \displaystyle\int_{(1-\sqrt{5})d}^{d} \left(-\sqrt{5}+2\right)x + \left(\sqrt{5}-1\right)d - \frac{1}{d}x^2 dx$

$= \dfrac{1}{6d}\left\{d-(1-\sqrt{5})d\right\}^3$

$= \dfrac{1}{6d}\cdot 5\sqrt{5}d^3 = \dfrac{5\sqrt{5}}{6}d^2$

$S_2 = \displaystyle\int_{-d}^{d} d - \frac{1}{d}x^2 dx$

$= \dfrac{1}{6d}\left\{d-(-d)\right\}^3$

$= \dfrac{4d^2}{3}$

よって，$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{5\sqrt{5}d^2}{6}\cdot\dfrac{3}{4d^2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{8}$