

(1)

アイ	1,2
ウエ	1,4
オカキ	3,8,4
クケ	3,6

(2)

コサ	1,6
シス	5,4
セソ	7,4
タ	6
チツ	1,2
テトナニ	12,4,2

(3)

ヌネノハ	1665
ヒフ	60
ヘホマミ	3285
ム	9
メモヤ	511
ユヨ	27
ラリルレ	6643

(1) C_1 と C_2 を連立して

$$2x^2 = (x-t)^2 + e^{-4t^2}$$

$$x^2 + 2tx - t^2 - e^{-4t^2} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

① 式の判別式を D とすると

$$D = 4t^2 - 4(-t^2 - e^{-4t^2})$$

$$= 4t^2 + 4t^2 + 4e^{-4t^2} > 0$$

よって C_1, C_2 は2点で交わることが示された。

(2) ①より $\alpha + \beta = -2t, \alpha\beta = -t^2 - e^{-4t^2}$ である。

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \sqrt{(-2t)^2 - 4(-t^2 - e^{-4t^2})}$$

$$= \sqrt{4t^2 + 4t^2 + 4e^{-4t^2}}$$

$$= 2\sqrt{2t^2 + e^{-4t^2}}$$

$$(3) S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 8(2t^2 + e^{-4t^2})^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}(2t^2 + e^{-4t^2})^{\frac{3}{2}}$$

$$(4) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}(2t^2 + e^{-4t^2})^{\frac{1}{2}}(4t - 8te^{-4t^2})$$

$$= 8\sqrt{2t^2 + e^{-4t^2}}(1 - 2e^{-4t^2})t$$

よって $\frac{dS}{dt} = 0$ となる t は $t = 0$ および $e^{-4t^2} = \frac{1}{2}$ より $t = \pm \frac{\sqrt{\log 2}}{2}$

このとき、増減表は以下の通り

t		$-\frac{\sqrt{\log 2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{\log 2}}{2}$	
$\frac{dS}{dt}$	-	0	+	0	-	0	+
S	$\searrow$	最小	$\nearrow$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$t^2 = \frac{\log 2}{4}$ のとき

$$S = \frac{4}{3} \left(2 \cdot \frac{\log 2}{4} + e^{-\log 2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

よって $t = \frac{\sqrt{\log 2}}{2}$ および $-\frac{\sqrt{\log 2}}{2}$ のとき

$$\text{最小値 } \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

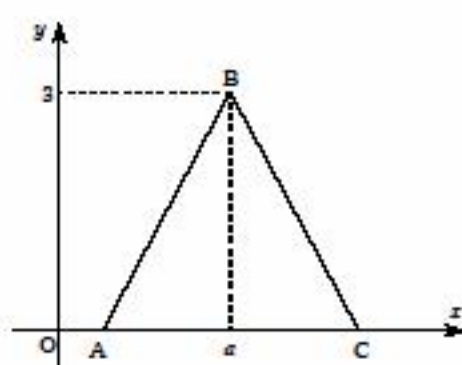
(1) $b=0$ と考えてよい.

直線 AB は

$$y=3x-3a+3$$

直線 BC は

$$y=-3x+3a+3$$

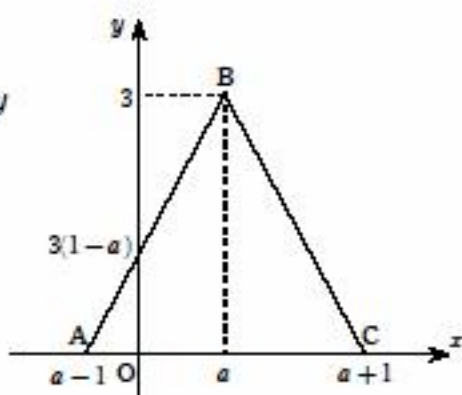


(i) $a \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^3 \pi x_{BC}^2 dy - \int_0^3 \pi x_{BA}^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 \left(-\frac{y}{3} + a + 1\right)^2 dy - \pi \int_0^3 \left(\frac{y}{3} + a - 1\right)^2 dy \\ &= 6\pi a \end{aligned}$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^3 \pi x_{BC}^2 dy - \int_{3(1-a)}^3 \pi x_{BA}^2 dy \\ &= \pi \int_0^3 \left(-\frac{y}{3} + a + 1\right)^2 dy \\ &\quad - \pi \int_{3(1-a)}^3 \left(\frac{y}{3} + a - 1\right)^2 dy \\ &= (3a^2 + 3a + 1 - a^3)\pi \end{aligned}$$



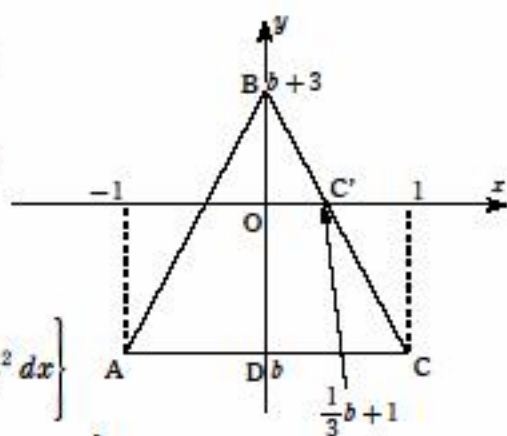
(2) (i) $b \leq 0$ かつ $b+3 \geq 0$ だから

$$-3 \leq b \leq 0 \quad \dots(\text{答})$$

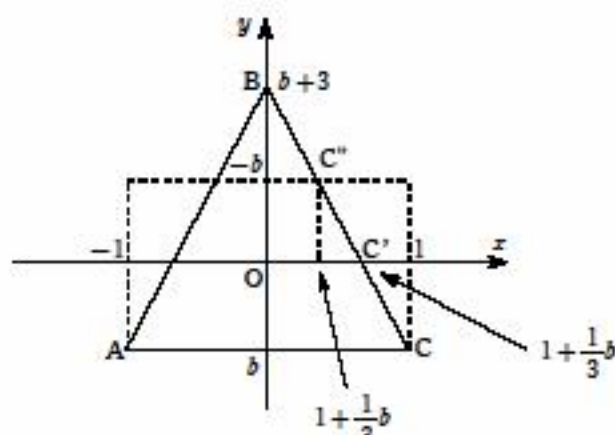
(ii) $a=0$ として考えてよい. 右図の $\triangle BCD$ を x 軸の周りに回転してできる立体の体積の2倍が V_2 である.

ア) $-3 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} V_2 &= 2 \left\{ \int_0^1 \pi b^2 dx - \int_{\frac{1}{3}b+1}^1 \pi y_{CC'}^2 dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \pi b^2 - \pi \int_{\frac{1}{3}b+1}^1 (-3x+b+3)^2 dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ b^2 + \frac{1}{9}b^3 \right\} \\ &= \frac{2}{9}\pi b^2(9+b) \end{aligned}$$



イ) $-\frac{3}{2} \leq b \leq 0$ のとき



$$\begin{aligned} V_2 &= 2 \left\{ \int_0^{1+\frac{2}{3}b} \pi y_{BC}^2 dx + \int_{1+\frac{2}{3}b}^1 \pi b^2 dx - \int_{1+\frac{1}{3}b}^1 \pi y_{CC'}^2 dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^{1+\frac{2}{3}b} (-3x+b+3)^2 dx - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{9}b^3 \right\} \\ &= 2\pi \left\{ -\frac{1}{9} [(-3x+b+3)^3]_0^{1+\frac{2}{3}b} - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{9}b^3 \right\} \\ &= \frac{2}{3}\pi (-b^3 + 3b^2 + 9b + 9) \end{aligned}$$

ア) イ) より

$$V_2 = \begin{cases} \frac{2}{9}\pi b^2(9+b) & \left(-3 \leq b \leq -\frac{3}{2} \text{ のとき}\right) \\ \frac{2}{3}\pi(-b^3 + 3b^2 + 9b + 9) & \left(-\frac{3}{2} \leq b \leq 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

ア) $-3 \leq b \leq -\frac{3}{2}$ のとき

$$\frac{dV_2}{db} = \pi b \left(4 + \frac{2}{3}b\right) < 0$$

$\frac{dV_2}{db}$ は単調に減少し、増減表は下図となる

b	-3	$\dots$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{dV_2}{db}$		$-$	
V_2	12π	$\searrow$	$\frac{15}{4}\pi$

イ) $-\frac{3}{2} \leq b \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{db} &= \frac{2}{3}\pi(-3b^2 + 6b + 9) \\ &= -2\pi(b^2 - 2b - 3) \\ &= -2\pi(b-3)(b+1) \end{aligned}$$

$$\frac{dV_2}{db} = 0 \text{ のとき } b = -1, 3$$

b	$-\frac{3}{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	0
$\frac{dV_2}{db}$		$-$	0	$+$	
V_2	$\frac{15}{4}\pi$	$\searrow$	$\frac{8}{3}\pi$	$\nearrow$	6π

したがって

$$\begin{cases} b = -3 \text{ のとき最大値 } 12\pi \\ b = -1 \text{ のとき最小値 } \frac{8}{3}\pi \end{cases}$$

(3) $a=5$ のとき $V_1=30\pi$ である。(2)の条件では、 $V_1=V_2$ を満たす b は存在しない。

$b > 0$ のとき $V_2=6(b+1)\pi$ であるから

$$6(b+1)\pi = 30\pi \quad \therefore b = 4$$

これは $b > 0$ を満たす。

$b < -3$ のとき $V_2=-6(b+1)\pi$ であるから

$$-6(b+1)\pi = 30\pi \quad \therefore b = -6$$

これは $b < -3$ を満たす。

よって $b=4, -6 \dots\dots(\text{答})$