

(1)

(2)

(3)

(4)

アイウエオカキクケコサシスセ

4 2 1 5 1 0 1 2 7 4 6 0 3 7

2

(1)

ア

3

イ

2

(2)

ウ

8

エ

4

(3)

オ

6

カ

8

3

(1)

ア
イ
ウ
エ
オ
カ
キ
ク
ケ
コ
サ

4
3
0
1
3
2
4
8
1
8
1

(2)

$$(1) f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 3 \\ &= \cos x + (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \\ &= 4 \cos x \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

関数 $y = \cos x (0 \leq x \leq \pi)$ は x の単調減少関数なので、関数 $y = f(x)$ の増減表は以下の通り。

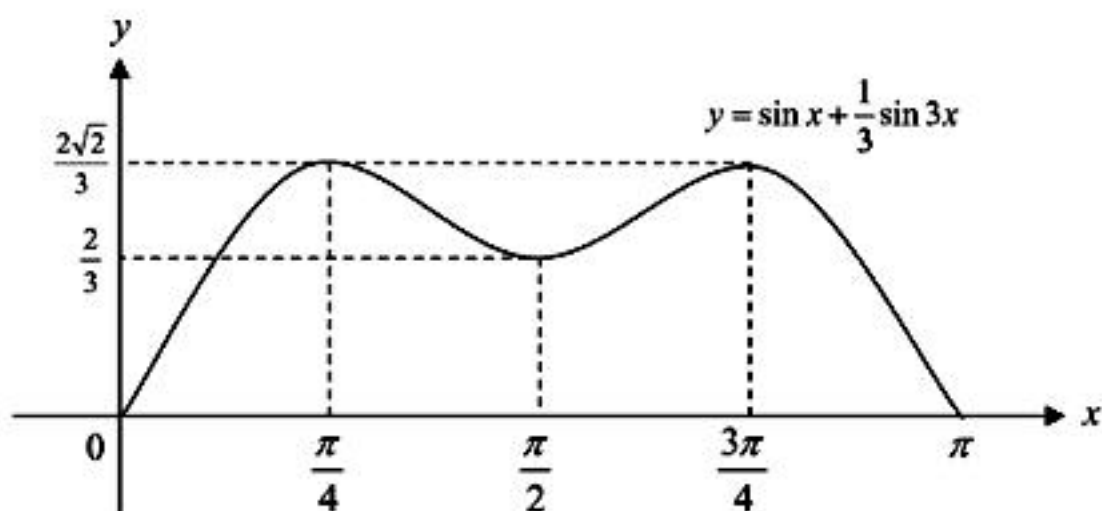
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	0

したがって、

$f(x)$ は $x = \underline{\frac{\pi}{4}}, \underline{\frac{3}{4}\pi}$ のときに極大値 $\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ をとり、 $x = \underline{\frac{\pi}{2}}$ のときに極小値 $\underline{\frac{2}{3}}$ をとる。……

(答)

(2) (1)の増減表より、 $y = f(x) (0 \leq x \leq \pi)$ のグラフの概形は下図になる。



(3)

(i) (2)のグラフより、

$k < \frac{3}{2}$ のとき、 $0 \leq x \leq \pi$ において $y = kg(x)$ と $y = f(x)$ の共有点は $(0,0), (\pi,0)$ の2点のみで、定義域内において $kg(x) \leq f(x)$ が成立する。

$k = \frac{3}{2}$ のとき、 $0 \leq x \leq \pi$ において $y = kg(x)$ と $y = f(x)$ の共有点は $(0,0), (\pi,0), (\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3})$ の3点のみで、このときも定義域内において $kg(x) \leq f(x)$ が成立する。

$k > \frac{3}{2}$ のとき、 $kg(\frac{\pi}{2}) = k > f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$ となる。

したがって、条件(A)の必要十分条件は $k \leq \frac{3}{2}$ ……①である。

この①の条件下において、

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^{\pi} \{f(x) - kg(x)\} dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x - k \sin x) dx \\ &= (1-k) \int_0^{\pi} \sin x dx + \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin 3x dx \\ &= (1-k) [-\cos x]_0^{\pi} + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\pi} \\ &= \underline{\underline{\frac{20}{9} - 2k}} \text{ ……(答)} \end{aligned}$$

(ii) (i)より $S(k)$ は k の単調減少関数であり、①より

$S(k)$ は $k = \underline{\frac{2}{3}}$ のときに最小値 $S(\frac{2}{3}) = \frac{20}{9} - 2 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{9}}}$ をとる。……(答)

$$(1) \textcircled{1} \iff \textcircled{2} \iff L_{n+1} = (\alpha + \beta)L_n - \alpha\beta L_{n-1} \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{一方、与えられた漸化式より } L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{と} \textcircled{4} \text{の係数を比較して、} \alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

解と係数の関係より、求めるべき2次方程式は $x^2 - x - 1 = 0 \dots\dots$ (答)

$$(2) x^2 - x - 1 = 0 \text{ より } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ なので、} \alpha > \beta \text{ より、} \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より数列} \{L_{n+1} - \beta L_n\} \text{は、初項が } L_1 - \beta L_0 = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot 2 = \sqrt{5} \text{ で}$$

公比が α の等比数列なので

$$L_{n+1} - \beta L_n = \sqrt{5} \cdot \alpha^n \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} \text{より数列} \{L_{n+1} - \alpha L_n\} \text{は初項が } L_1 - \alpha L_0 = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot 2 = -\sqrt{5} \text{ で}$$

公比が β の等比数列なので

$$L_{n+1} - \alpha L_n = -\sqrt{5} \cdot \beta^n \dots\dots \textcircled{6}$$

⑤-⑥より

$$(\alpha - \beta)L_n = \sqrt{5}(\alpha^n + \beta^n)$$

$$\alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ より}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \dots\dots \text{(答)}$$

$$(3) (L_n)^2 - L_{2n} = (\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) = 2\alpha^n \beta^n = 2(\alpha\beta)^n = 2 \cdot (-1)^n$$

$$= \begin{cases} 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -2 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \text{ (ただし、偶数は0を含むものとする) } \dots\dots \text{(答)}$$

(4) 以下、 n は正の奇数であるとする。このとき、(3)の結果より

$$(L_n)^2 - L_{2n} = -2 \iff L_{2n} = (L_n)^2 + 2 \dots\dots \textcircled{7}$$

$n+1$ は偶数なので、(3)の結果より、

$$(L_{n+1})^2 - L_{2(n+1)} = 2 \iff L_{2n+2} = (L_{n+1})^2 - 2 \dots\dots \textcircled{8}$$

したがって、 $L_{2n} \leq p^2 \leq L_{2n+2} \dots\dots \textcircled{9}$ について

$$\textcircled{9} \iff (L_n)^2 + 2 \leq p^2 \leq (L_{n+1})^2 - 2$$

この条件を満たす正の整数 p は

$$L_n + 1, L_n + 2, L_n + 3, \dots, L_{n+1} - 1$$

の計 $(L_{n+1} - 1) - (L_n + 1) + 1 = L_{n+1} - L_n - 1 = L_{n-1} - 1$ (個)

($\because L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ より)

条件(A)より、これが17に等しいので $L_{n-1} - 1 = 17$ より $L_{n-1} = 18$

$$L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$$

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4$$

$$L_4 = L_3 + L_2 = 4 + 3 = 7$$

$$L_5 = L_4 + L_3 = 7 + 4 = 11$$

$$L_6 = L_5 + L_4 = 11 + 7 = 18$$

より、正の奇数 $n=7$ は $L_{n-1}=18$ を満たす。

数列 $\{L_n\}$ が与えられた漸化式より、 n に対して単調増加することから、

$L_{n-1}=18$ を満たす正の奇数 n は他には存在しない。

したがって、条件(A)を満たす正の奇数 n は $\underline{n=7} \dots\dots$ (答)

このとき、⑨を満たす正の整数 p の最小値は

$$L_7 + 1 = L_6 + L_5 + 1 = 18 + 11 + 1 = \underline{30} \dots\dots \text{(答)}$$