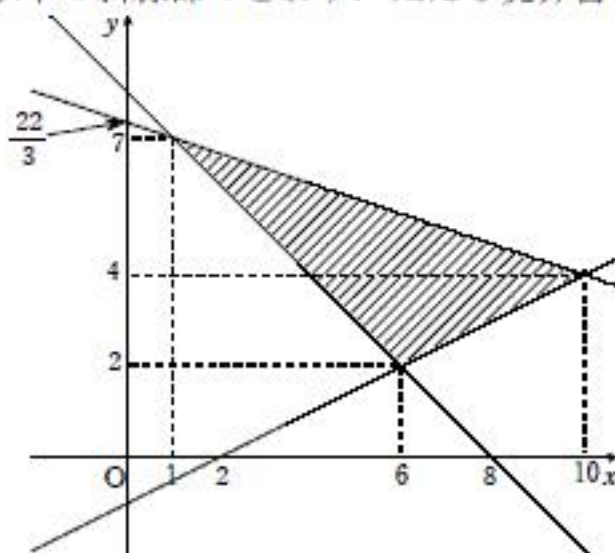


1

(1) 以下の斜線部のとおり。ただし境界含む。



(2) $mx + y = k$ とおく。 $y = -mx + k$ であるので、傾き $-m$ の直線が領域と交わる中での切片の最大値と最小値が、求める最大、最小となる。

(i) $-m \geq \frac{1}{2}$ すなわち $m \leq -\frac{1}{2}$ の時、

点(1, 7) を通る時 k は最大となり最大値は $m + 7$

点(10, 4) を通る時 k は最小となり最小値は $10m + 4$

(ii) $-m \leq \frac{1}{2}$ かつ $-m \geq -\frac{1}{3}$ すなわち $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{3}$ の時、

点(1, 7) を通る時 k は最大となり最大値は $m + 7$

点(6, 2) を通る時 k は最小となり最小値は $6m + 2$

(iii) $-m \leq -\frac{1}{3}$ かつ $-m \geq -1$ すなわち $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ の時、

点(10, 4) を通る時 k は最大となり最大値は $10m + 4$

点(6, 2) を通る時 k は最小となり最小値は $6m + 2$

(iv) $m \geq 1$ の時、

点(10, 4) を通る時 k は最大となり最大値は $10m + 4$

点(1, 7) を通る時 k は最小となり最小値は $m + 7$

(i) ~ (iv) より

$$\begin{aligned} \text{最大値} & \begin{cases} m + 7 & \left(m \leq \frac{1}{3} \text{ の時} \right) \\ 10m + 4 & \left(m \geq \frac{1}{3} \text{ の時} \right) \end{cases} \\ \text{最小値} & \begin{cases} 10m + 4 & \left(m \leq -\frac{1}{2} \text{ の時} \right) \\ 6m + 2 & \left(-\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \text{ の時} \right) \\ m + 7 & \left(m \geq 1 \text{ の時} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

(1) $y' = 4x^3 - 2x$ より, P における接線は

$$\begin{aligned} y &= (4\alpha^3 - 2\alpha)(x - \alpha) + \alpha^4 - \alpha^2 \\ &= (4\alpha^3 - 2\alpha)x - 3\alpha^4 + \alpha^2 \quad \text{である.} \end{aligned}$$

この接線と C との交点は,

$$\begin{aligned} (4\alpha^3 - 2\alpha)x - 3\alpha^4 + \alpha^2 &= x^4 - x^2 \\ x^4 - x^2 - (4\alpha^3 - 2\alpha)x + 3\alpha^4 - \alpha^2 &= 0 \\ (x - \alpha)^2(x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

ここで, 条件を満たすためには, $x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1 = 0$ が, $x > 0$ で, $x = \alpha$ 以外の異なる 2 解を持てばよい.

つまり, $\alpha^2 + 2\alpha^2 + 3\alpha^2 - 1 \neq 0$

$$\alpha < 0 \quad \text{より} \quad \alpha \neq -\frac{1}{\sqrt{6}} \dots \textcircled{1}$$

また判別式を D とし, $\frac{D}{4} = \alpha^2 - 3\alpha^2 + 1 > 0$

$$\alpha^2 - \frac{1}{2} < 0$$

$$\alpha < 0 \quad \text{より} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 0 \dots \textcircled{2}$$

また, $f(x) = x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1$ とすると,

$$f(0) = 3\alpha^2 - 1 > 0 \quad \alpha < 0 \quad \text{より} \quad \alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}} \dots \textcircled{3}$$

$$f(x) = (x + \alpha)^2 + 2\alpha^2 - 1 \quad \text{より} \quad -\alpha > 0 \quad \therefore \alpha < 0 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{より,} \quad (\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_s^t (x-s)^2 g(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-s)^3 g(x) \right]_s^t - \frac{1}{3} \int_s^t (x-s)^3 g'(x) dx \\ &= \frac{1}{3}(t-s)^3 g(t) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4}(x-s)^4 \right]_s^t + \frac{g''(x)}{12} \int_s^t (x-s)^4 dx \\ & \quad (\because g(x) \text{ は 2 次式より, } g''(x) \text{ は定数}) \\ &= \frac{1}{3}(t-s)^3 g(t) - \frac{1}{12}(t-s)^4 g'(t) + \frac{g''(x)}{12} \left[\frac{1}{5}(x-s)^5 \right]_s^t \\ &= \frac{1}{3}(t-s)^3 g(t) - \frac{1}{12}(t-s)^4 g'(t) + \frac{g''(t)}{60}(t-s)^5 \end{aligned}$$

(3) 他の 2 つの交点を, α に近い順に

β, γ とおく.

条件より,

$$\begin{aligned} & \int_\alpha^\beta \{x^4 - x^2 - (4\alpha^3 - 2\alpha)x + 3\alpha^4 - \alpha^2\} dx \\ &= \int_\beta^\gamma \{(4\alpha^3 - 2\alpha)x - 3\alpha^4 + \alpha^2 - x^4 + x^2\} dx \\ & \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1) dx = \int_\beta^\gamma -(x-\alpha)^2(x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1) dx \end{aligned}$$

ここで $x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1 = g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 g(\beta) - \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 g'(\beta) + \frac{1}{60}(\beta-\alpha)^5 g''(\beta) \\ &= -\left\{ \frac{1}{3}(\gamma-\alpha)^3 g(\gamma) - \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 g(\beta) - \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4 g'(\gamma) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 g'(\beta) + \frac{1}{60}(\beta-\alpha)^5 g''(\gamma) - \frac{1}{60}(\beta-\alpha)^5 g''(\beta) \right\} \end{aligned}$$

ここで, $g(\beta) = g(\gamma) = 0$

$$g'(x) = 2x + 2\alpha \quad \text{より,} \quad g'(\beta) = 2\beta + 2\alpha, \quad g'(\gamma) = 2\gamma + 2\alpha$$

$g''(\beta) = g''(\gamma) = 2$ を代入して,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^4(\alpha+\beta) + \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \\ &= \frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^4(\alpha+\gamma) - \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^4(\beta+\alpha) \\ & \quad -\frac{1}{30}(\gamma-\alpha)^5 + \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{30}(\gamma-\alpha)^5 - \frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^4(\gamma+\alpha) = 0$$

$$(\gamma-\alpha)^4\{\gamma-\alpha-5(\gamma+\alpha)\} = 0$$

$$(\gamma-\alpha)^4(3\alpha+2\gamma) = 0$$

$$\gamma \neq \alpha \quad \text{より} \quad \gamma = -\frac{3}{2}\alpha$$

また, 解と係数の関係より, $\beta + \gamma = -2\alpha$ だから $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$

この時, $x^2 + 2\alpha x + 3\alpha^2 - 1 = 0$ を解くと,

$$\begin{aligned} x &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3\alpha^2 + 1} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{1 - 2\alpha^2} \quad \text{より} \end{aligned}$$

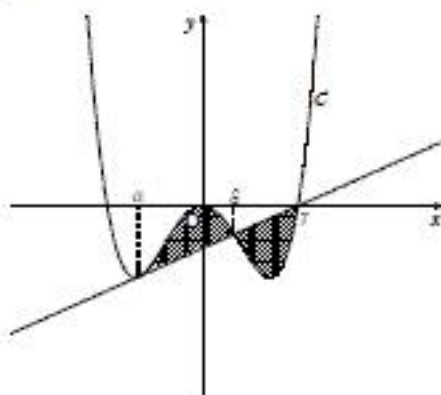
$$\beta = -\alpha - \sqrt{1 - 2\alpha^2} = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$\sqrt{1 - 2\alpha^2} = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$1 - 2\alpha^2 = \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{より} \quad \therefore \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$(\text{答}) \quad \alpha = -\frac{2}{3}$$



(1) $X=4$ かつ $Y=4$ となるのは、4 枚とって和が 4 の時であり、

これは

- (i) 1 を 4 枚引く.
- (ii) 4 を 1 枚, 0 を 3 枚引く.
- (iii) 2 を 1 枚, 1 を 2 枚, 0 を 1 枚引く.
- (iv) 3 を 1 枚, 1 を 1 枚, 0 を 2 枚引く.

の 4 パターン.

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{1+1+{}_4C_2 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_{10}C_4} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{16}{105} = \frac{8}{315} \quad (\text{答}) \frac{8}{315} \end{aligned}$$

(2) $XY=2(X+Y)$

$$2X+2Y-XY=0$$

$$X(2-Y)-2(2-Y)+4=0$$

$$(X-2)(Y-2)=4$$

$X-2, Y-2$ は整数だから、

$$(X-2, Y-2) = (1, 4), (4, 1), (-2, -2), (2, 2), (-1, -4), (-4, -1)$$

$$\therefore (X, Y) = (3, 6), (6, 3), (0, 0), (4, 4), (1, -2), (-2, 1)$$

ここで、 $X > 0, Y > 0, X \leq 6$ および、枚数を考慮すると、可能な X, Y の組は、

$$(X, Y) = (3, 6), (6, 3), (4, 4) \text{ のみ.}$$

(i) $X=3, Y=6$, つまり 3 が出て 3 枚引き、和が 6 となる場合、とりうる組合せは、

ア) 4 が 1 枚, 2 が 1 枚, 0 が 1 枚.

イ) 4 が 1 枚, 1 が 2 枚.

ウ) 3 が 1 枚, 2 が 1 枚, 1 が 1 枚.

であるので、求める確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{13}{720}$$

(ii) $X=6, Y=3$, つまり 6 が出て 6 枚引き、和が 3 となる場合、とりうる組合せは、

1 が 3 枚, 0 が 3 枚のみ.

よって、求める確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_3}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{315}$$

(iii) $X=4, Y=4$ の場合

$$(1) \text{ より } \frac{8}{315}$$

(i) ~ (iii) より $XY=2(X+Y)$ となる確率は、

$$\frac{13}{720} + \frac{1}{315} + \frac{8}{315} = \frac{235}{5040} = \frac{47}{1008}$$

$$(\text{答}) \frac{47}{1008}$$