

1 (1) 放物線 C 上の点 $(t, t^2 - 6t + 13)$ における接線の方程式は,
 $y' = 2x - 6$ より

$$y - (t^2 - 6t + 13) = (2t - 6)(x - t)$$

これが $(4, 1)$ を通るので,

$$1 - (t^2 - 6t + 13) = (2t - 6)(4 - t)$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t - 2)(t - 6) = 0$$

$$t = 2, 6$$

よって l_1 の方程式は $y - 1 = 6(x - 4)$, すなわち

$$y = 6x - 23 \quad \dots\dots \text{ア, イウ}$$

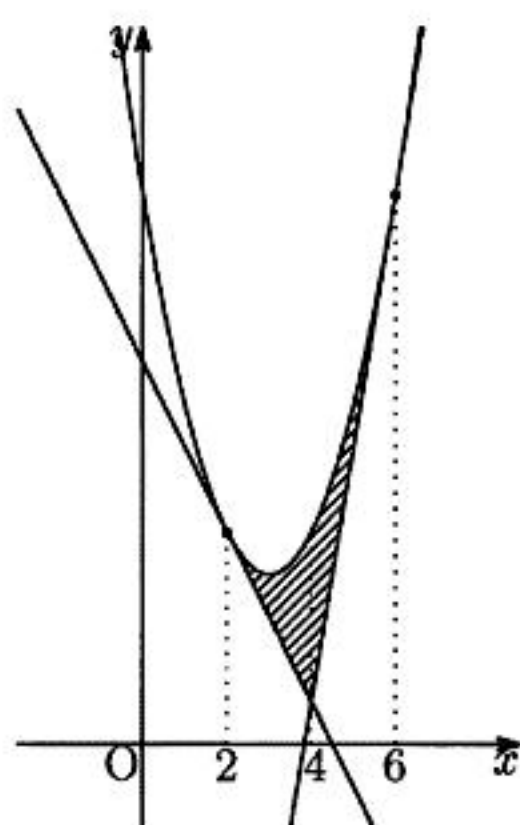
同様にして l_2 の方程式は $y - 1 = -2(x - 4)$, すなわち

$$y = -2x + 9 \quad \dots\dots \text{エ, オ}$$

C と l_1 および l_2 によって囲まれる図形

の面積 (右図斜線部) は

$$\begin{aligned} & \int_2^4 \{x^2 - 6x + 13 - (-2x + 9)\} dx \\ & + \int_4^6 \{x^2 - 6x + 13 - (6x - 23)\} dx \\ & = \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^6 (x - 6)^2 dx \\ & = \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_2^4 + \left[\frac{1}{3}(x - 6)^3 \right]_4^6 \\ & = \frac{16}{3} \quad \dots\dots \text{カキ, ク} \end{aligned}$$



(2) 二つの袋 A, B からそれぞれ 5 個ずつ玉を取り出す場合の数は,

$${}_{10}C_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad (\text{通り})$$

袋 A から取り出された玉のうち, 白玉が 2 個である場合の数は

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

よってこのときの確率は,

$$\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{10}{21} \quad \dots\dots \text{ケコ, サシ}$$

袋 B から取り出された玉のうち, 白玉が 2 個である場合の数は

$${}_8C_3 \times {}_2C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2^3 \cdot 7 \quad (\text{通り})$$

よってこのときの確率は,

$$\frac{2^3 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{2}{9} \quad \dots\dots \text{ス, セ}$$

よって, それぞれの袋から取り出された赤玉の個数が 3 個で等しくなる確率は,

$$\frac{10}{21} \times \frac{2}{9} = \frac{20}{189}$$

同様にして, それぞれの袋から取り出された赤玉の個数が 4 個, 5 個で等しくなる確率をそれぞれ求める.

それぞれの袋から取り出された赤玉の数が 4 個で等しくなる確率は,

$$\frac{{}_6C_4 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_5} \times \frac{{}_8C_4 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_5} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2} = \frac{25}{189}$$

それぞれの袋から取り出された赤玉の数が 5 個で等しくなる確率は,

$$\frac{{}_6C_5}{{}_{10}C_5} \times \frac{{}_8C_5}{{}_{10}C_5} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 7}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2} = \frac{1}{189}$$

よって求める確率は

$$\frac{20}{189} + \frac{25}{189} + \frac{1}{189} = \frac{46}{189} \quad \dots\dots \text{ソタ, チツテ}$$

$$\boxed{2} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2}{1+k}, \quad \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = k \frac{a_{n+2}}{a_n} \quad \dots\dots \quad \textcircled{1}$$

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ より $b_n \neq 0$ であるから $a_n = \frac{1}{b_n}$ とおける.

これを①に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{b_{n+2}} - \frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}} = k \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}} \\ \Leftrightarrow & \frac{b_n(b_{n+1} - b_{n+2})}{b_{n+2}(b_n - b_{n+1})} = k \frac{b_n b_{n+1}}{b_{n+2} b_{n+1}} \\ \Leftrightarrow & b_{n+2} - b_{n+1} = k(b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

よって求める漸化式は

$$b_{n+2} - (k+1)b_{n+1} + kb_n = 0$$

(2) (1) で求めた漸化式を変形すると,

$$\begin{cases} b_{n+2} - b_{n+1} = k(b_{n+1} - b_n) & \dots\dots \textcircled{2} \\ b_{n+2} - kb_{n+1} = b_{n+1} - kb_n & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

ここで $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1, \quad b_2 = \frac{1}{a_2} = \frac{k+1}{2}$

よって②, ③より

$$b_{n+1} - b_n = k^{n-1}(b_2 - b_1) = k^{n-1} \frac{k-1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$b_{n+1} - kb_n = b_2 - kb_1 = -\frac{k-1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

④ - ⑤ より $(k-1)b_n = (k^{n-1} + 1) \frac{k-1}{2}$

よって, $k \neq 1$ より $b_n = \frac{k^{n-1} + 1}{2}$

以上より

$$a_n = \frac{2}{k^{n-1} + 1}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{aligned} & \frac{p^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{2p \cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= p^2(1 + \tan^2 \alpha) + 1 + \tan^2 \beta + 2p(1 + \tan \alpha \tan \beta) \\ &= (p^2 \tan^2 \alpha + 2p \tan \alpha \tan \beta + \tan^2 \beta) + (p^2 + 2p + 1) \\ &= (p \tan \alpha + \tan \beta)^2 + (p + 1)^2 \\ &= 2(p + 1)^2 \end{aligned}$$

(2) $p > 0, \cos \alpha > 0, \cos \beta > 0$ より $\left(\frac{p}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}\right)^2$ が最小となるとき,

$\frac{p}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}$ も最小となる.

(1) より

$$\left(\frac{p}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}\right)^2 = 2(p + 1)^2 + \frac{2p}{\cos \alpha \cos \beta} \{1 - \cos(\beta - \alpha)\}$$

よって p は正の定数であるから, $\cos(\beta - \alpha) = 1$ すなわち $\alpha = \beta$ のとき

$\left(\frac{p}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}\right)^2$ は最小となる.

このとき $(p + 1) \tan \alpha = p + 1 \iff \tan \alpha = 1$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $\alpha = \beta = 45^\circ$

以上のことより, $\frac{p}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}$ は

$$\alpha = \beta = 45^\circ \quad \text{のとき最小値} \quad \sqrt{2}(p + 1)$$

をとる.