

G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の 内のアからへにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。また、ホについては、解答群から当てはまるものを選び、その数字を解答用マークシートの解答欄の指定された行にマークせよ。ただし、(1)において、 は 2 桁の数、 は 3 桁の数を表す。また、(2)において、分数は既約分数として表すものとする。

(40 点)

(1) 1 から 1000 までの整数の集合を S とする。 S の要素のうち、3 の倍数全体の集合を A 、5 の倍数全体の集合を B 、7 の倍数全体の集合を C とする。

- (a) $A \cap B \cap C$ の要素の個数は ア 個である。
- (b) $(A \cap B) \cup C$ の要素の個数は イ ウ エ 個である。
- (c) 集合 S の要素のうちで、 B の要素 b と C の要素 c を選んで $b + c$ とかけるもの全体の集合を D とする。 D の要素のうち、5 で割り切れる数全体の集合を D_0 、5 で割って 1 余る数全体の集合を D_1 、5 で割って 2 余る数全体の集合を D_2 、5 で割って 3 余る数全体の集合を D_3 、5 で割って 4 余る数全体の集合を D_4 とする。 D_0 の要素で最小のものは オ カ、 D_1 の要素で最小のものは キ ク、 D_2 の要素で最小のものは ケ コ、 D_3 の要素で最小のものは サ シ、 D_4 の要素で最小のものは ス セ である。
- (d) 集合 S の要素で D に属さないものの個数は ソ タ 個であり、そのうちで最大の要素は チ ツ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) a, b を正の実数とし、円

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

と楕円

$$E: \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。楕円 E は、その内部（周を含む）に円 C を含んでいると仮定する。この条件の下で実数 a, b を動かすときの楕円 E の面積の最小値を求めよう。次の2つの場合 (A), (B) のいずれかに最小値を与える楕円がある。

(A) 円 C が x 軸に関して対称な異なる2点で楕円 E に内接する場合 (図1)。

このとき、 a, b は等式

$$b^4 - \boxed{\text{テ}} a^2 b^2 + \boxed{\text{ト}} a^2 = 0$$

を満たす。

(B) 円 C が点 $(-1, 0)$ で楕円 E に内接する場合 (図2)。

このとき $a = \boxed{\text{ナ}}$ であり、 b のとり得る範囲は $b \geq \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

楕円 E の面積 S の最小値を求めよう。(A) の場合には、

$$S^2 = \pi^2 \frac{b \boxed{\text{ヌ}}}{b^2 - 1}$$

と表せるから、 $a = \frac{3}{2} \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$, $b = \frac{1}{2} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ のとき S は (A) の場合の最小値

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \pi$$

をとる。一方、(B) の場合の面積 S の最小値は $S_2 = 2\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}} \pi$ である。このいずれの場合も対応する楕円が上の条件を満たしていることは容易に確かめられる。

したがって、楕円 E の面積 S の最小値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

ホの解答群

0 S_1

1 S_2

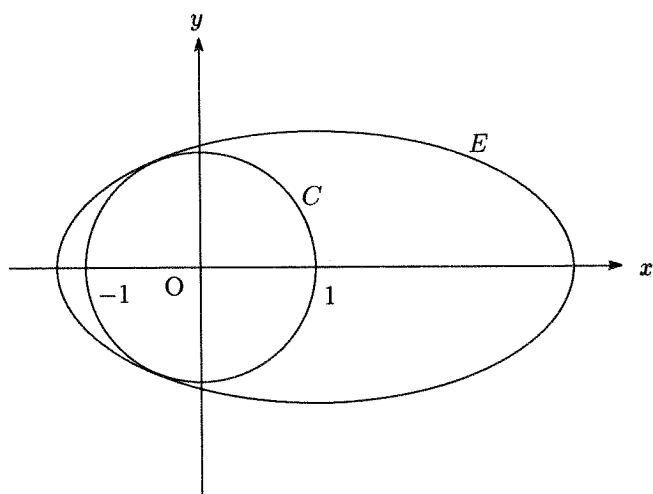


图 1

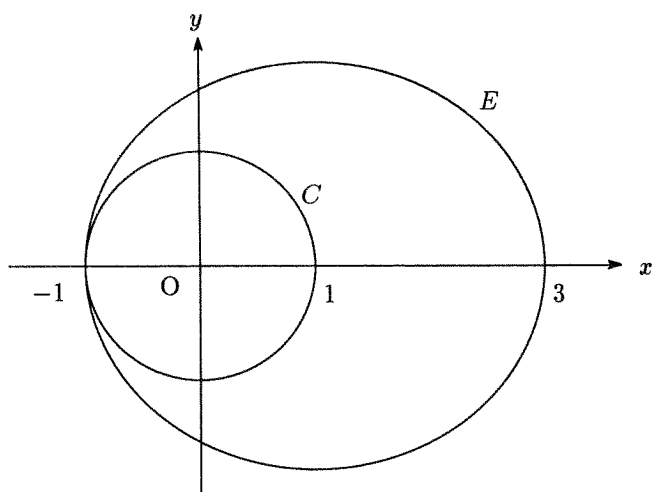


图 2

問題 **2** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ および関係式

$$a_{n+1} = 4b_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定義されている。以下の問いに答えよ。

(30 点)

(1) $c_n = a_n - 2b_n$, $d_n = a_n + 2b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の満たす漸化式をそれぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n c_k$, $\sum_{k=1}^n d_k$ をそれぞれ求めよ。

(4) $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ をそれぞれ求めよ。

(5) 自然数 n に対して, 不等式

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2}$$

が成立することを示せ。

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 関数 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$ を考える。以下の問いに答えよ。 (30 点)

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極値をとる x の値および $y = f(x)$ のグラフの変曲点を求めよ。(答のみでよい。)
- (2) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) s を与えられた実数とする。直線 $y = f(s)$ と曲線 $y = f(x)$ が異なる 3 点で交わるような実数 s の範囲を求めよ。
- (4) s が (3) で定まる範囲にあるとき、直線 $y = f(s)$ と曲線 $y = f(x)$ の 3 交点を $Q(a, f(a))$, $R(s, f(s))$, $S(b, f(b))$ とする。ただし、 $a < s < b$ と仮定する。実数 p を、 $s = p$ のとき R が線分 QS を $2:1$ に内分するように選ぶ。 p を決定せよ。
- (5) (4) で定めた a, b, p に対し、 $\int_a^b (f(x) - f(p)) dx$ を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。