

H 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入
しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題

1

の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1

n を 2 以上の自然数とすると、次の問いに答えよ。

(50 点)

(1) 次の不等式を証明せよ。ただし、対数は自然対数である。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

(2) n 以下の自然数 k に対して、 $1, 2, \dots, n$ のうちで k の倍数であるものの個数を a_k とし、 k の約数であるものの個数を b_k とする。ただし、 1 と k は k の約数である。

(a) $n = 8$ のとき $\sum_{k=1}^8 a_k$ と $\sum_{k=1}^8 b_k$ をそれぞれ求めよ。

(b) n を 2 以上の自然数とすると、 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n}{k} - 1 < a_k \leq \frac{n}{k}$$

(c) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ を $a_1, a_2, \dots, a_n$ を用いて表せ。

(d) 次の不等式を証明せよ。

$$\left| \frac{1}{n} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - \log n \right| < 1$$

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 次の問いに答えよ。

(50 点)

(1) 加法定理を用いて次の等式を証明せよ。

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

(2) 区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、次の方程式の解をすべて求めよ。

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

(3) 関数 $f(x)$ を次の式で定める。

$$f(x) = \sin x + \cos x + \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{3} + \frac{\sin 4x + \cos 4x}{4}$$

このとき、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で関数 $f(x)$ が極大となる x の値と極小となる x の値をすべて求めよ。また、区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で $f(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。