

L 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 7 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 座標平面において, 放物線 $y = x^2 + 1$ 上の異なる 2 点 $P(a, a^2 + 1)$, $Q(b, b^2 + 1)$ ($a < b$) に対して, 点 P における接線と点 Q における接線の交点を R とする。

(a) 点 R の座標を a, b を用いて表すと $\left(\frac{\text{ア}}{\text{イ}}(a+b), \text{ウ}ab + \text{エ} \right)$ である。

(b) 点 R の座標が $\left(\text{オ}, \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \right)$ のとき, 三角形 PQR は正三角形になり, その 1 辺の長さは $\sqrt{\text{ク}}$ である。

(c) 点 R が直線 $y = x$ 上にあるとき, R の座標が $\left(\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}, \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \right)$ であれば $\angle PRQ$ は直角になる。また, このときの線分 PQ の長さは $\frac{\text{サシ}}{\text{ス}}$ である。

右のページは白紙です。

(2) $x \geq 0$ のとき、関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = [2x] + [4x] + [6x]$$

ここで、実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す。例えば、 $[1] = 1$, $\left[\frac{10}{3}\right] = 3$ である。

(a) x が $0 \leq x \leq 1$ を動くとき、 $f(x)$ の取りうる値は $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。

(b) $x \geq 0$ のとき、 $f(x+1) = f(x) + \boxed{\text{イ} \mid \text{ウ}}$ である。

(c) 0 から 100 までの整数で、関数 $f(x)$ の値となりうるものの個数は $\boxed{\text{エ} \mid \text{オ}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 50×50 個の正の数を、下図のように 50 行 50 列に並べる。

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,50} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,50} \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,50} \\
 a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,50} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{50,1} & a_{50,2} & a_{50,3} & a_{50,4} & \cdots & a_{50,50}
 \end{array}$$

$a_{i,j}$ の下添字 i, j ($1 \leq i \leq 50$, $1 \leq j \leq 50$) は、 i が行番号、 j が列番号を表す。

条件：

- 各行 $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,50}$ ($1 \leq i \leq 50$) は公差 d_i の等差数列
(d_i は第 i 行の公差である)

- 各列 $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{50,j}$ ($1 \leq j \leq 50$) は公比 r の等比数列
(r はすべての列に共通な公比である)

- $a_{4,2} = \frac{3}{16}$, $a_{3,3} = \frac{1}{2}$, $a_{2,4} = \frac{5}{4}$

が成り立つとき、以下の問いに答えなさい。

問題 1 (3) は次ページに続きます。

(a) 第4行の公差 d_4 は $d_4 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}} \mid \boxed{\text{ウ}}}$ である。

(b) 公比 r は $r = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(c) $a_{1,1} = \boxed{\text{カ}}$, $a_{3,4} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$, $a_{4,3} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(d) 自然数 n ($n \leq 50$) に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_{k,k} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$$

$$E_n = \sum_{k=1}^n a_{n+1-k,k} = a_{n,1} + a_{n-1,2} + \cdots + a_{1,n}$$

とすると,

$$S_9 = \frac{\boxed{\text{サ}} \mid \boxed{\text{シ}} \mid \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}} \mid \boxed{\text{ソ}} \mid \boxed{\text{タ}}}, \quad E_9 = \boxed{\text{チ}}$$

$$S_{50} = \boxed{\text{ツ}} - \frac{\boxed{\text{テ}} \mid \boxed{\text{ト}}}{2^{50}}, \quad E_{50} = \boxed{\text{ナ}} \mid \boxed{\text{ニ}}$$

である。

問題 **2** の解答は解答用紙 **2** に記入しなさい。

2

(25 点)

(1) 実数 a に対して、行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする。また、条件 p, q, r をそれぞれ次のように定める。

p : 行列 A は逆行列をもつ

q : $a \geq 0$ である

r : 連立 1 次方程式 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ は解をもつ

- (a) 条件「 p かつ q 」の否定を書きなさい。
- (b) 条件 p が成り立つような実数 a の条件を求め、さらにそのときの A の逆行列を求めなさい。
- (c) 条件 p, r に対して正しい記述を次の中から選びなさい。また、選んだ理由を説明しなさい。
- ① 条件 p は条件 r が成り立つための必要条件であるが、十分条件ではない。
 - ② 条件 p は条件 r が成り立つための十分条件であるが、必要条件ではない。
 - ③ 条件 p は条件 r が成り立つための必要条件でもあり、十分条件でもある。
 - ④ 条件 p は条件 r が成り立つための必要条件でも十分条件でもない。

問題 **2** は次ページに続きます。

(2) $0 \leq x \leq 2$ の範囲で、曲線 $y = 3^x - 1$ と直線 $y = 2x + 4$ および y 軸とで囲まれた部分を D とする。

(a) D の面積を求めなさい。

(b) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

問題 **3** の解答は解答用紙 **3** に記入しなさい。

3 二等辺三角形 ABC において $AB = AC = \sqrt{13}$, $BC = 4$ とする。三角形 ABC の外部に点 P を以下の 2 条件：

- 線分 BP は辺 AC と交わる
- $\angle BPC = \frac{\pi}{2}$ である

を満たすようにとる。線分 BP と辺 AC の交点を M とし、 $\frac{AM}{AC} = t$ とする。

(25 点)

(1) $\cos A$ の値を求めなさい。

(2) t の取りうる値の範囲を求めなさい。

(3) 線分 BP と線分 BM の長さの比 $\frac{BP}{BM}$ を t で表しなさい。

(4) 比 $\frac{BP}{BM}$ が最大となるときの t の値を求めなさい。