

B 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用マークシートに受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた同じ大きさの 7 個の球が入った袋がある。この袋の中から球を 1 つ取り出し、球に書かれた数字を調べて球を元に戻す試行を 1000 回繰り返す。 $a_0 = 0$ とし、 n 回目に袋の中から取り出した球の数字が、1 または 7 のときは $a_n = a_{n-1} + 2$ 、それ以外のときは $a_n = a_{n-1} + 1$ として数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1000}$ をつくる。この数列の中に n が含まれない確率を p_n ($n = 1, 2, 3, \dots, 1000$) とする。

$$(1) \quad p_1 = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ア} \\ \hline \text{イ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{イ} \\ \hline \end{array}}, \quad p_2 = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ウ} & \text{エ} \\ \hline \text{オ} & \text{カ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{オ} & \text{カ} \\ \hline \end{array}} \text{である。}$$

(2) 関係式

$$p_{n+1} + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{キ} \\ \hline \text{ク} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ク} \\ \hline \end{array}} p_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ケ} \\ \hline \text{コ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{コ} \\ \hline \end{array}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 999)$$

が成り立つ。

$$(3) \quad p_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{サ} \\ \hline \text{シ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{シ} \\ \hline \end{array}} - \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ス} \\ \hline \text{セ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{セ} \\ \hline \end{array}} \left(-\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}} \right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 1000) \text{となる。}$$

$$(4) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1000} \text{ の中に、} n \text{ が含まれる確率は } \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{チ} \\ \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ツ} \\ \hline \end{array}} \left(1 - \left(-\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{テ} \\ \hline \text{ト} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ト} \\ \hline \end{array}} \right)^{n+1} \right)$$

$$\text{であり、} n \text{ と } n+1 \text{ がともに含まれる確率は } \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ナ} \\ \hline \text{ニ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ニ} \\ \hline \end{array}} \left(1 - \left(-\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{テ} \\ \hline \text{ト} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ト} \\ \hline \end{array}} \right)^{n+1} \right) \text{である。}$$

ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots, 999$ とする。

(25 点)

右のページは白紙です。

2

xy 平面において、点 A を $(1, 0)$ とし、点 P は原点 O を中心とする半径 1 の円周の上半分 (すなわち、 $x^2 + y^2 = 1, y > 0$) を動くものとする。A を端点とする半直線 AP 上に、点 Q を $AQ = 1$ となるようにとり、線分 OQ の中点を R とおく。 $\angle AOP = \theta$ とする。

(1) $Q = P$ となるのは、 $\theta = \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ$ のときである。

(2) $0^\circ < \theta < \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ$ のとき、 $\angle POQ = \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}^\circ - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \theta$ であり、
 $\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき、 $\angle POQ = -\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}^\circ + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \theta$ である。

(3) θ が $0^\circ < \theta < \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ$ の範囲を動くとき、OR (線分 OR の長さ) が取りうる値の範囲は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < OR < \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ であり、 θ が $\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲を動くとき、OR が取りうる値の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < OR < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

(4) θ が $0^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲を動くとき、PR が最小になるのは $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}}$ のときで、このとき、 $PR = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

(25 点)

右のページは白紙です。

3

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ とするとき, xy 平面における曲線 $C_1: y = f(x)$ と放物線 $C_2: y = ax^2 + bx + c$ は, 点 $(1, f(1))$ において共通の接線を持ち, 点 $(3, f(3))$ で交わるという。 C_1 と C_2 によって囲まれた領域 (境界線も含む) を D とする。

(1) $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = -\boxed{\text{イ}}\boxed{\text{ウ}}$, $c = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) D の面積は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。(ただし, x^4 の導関数が $4x^3$ であることを用いよ。)

C_1 上の点 $(-1, f(-1))$ における C_1 の接線が C_2 と交わる点を P, Q とする。

(3) P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 (ただし, $x_1 < x_2$) とするとき,

$$x_2 - x_1 = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}}$$

である。

(4) 点 R が領域 D を動くとき, $\triangle PQR$ の面積の最大値は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}\boxed{\text{シ}}\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}\boxed{\text{タ}}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}}$$

であり, 最大値を与える R の x 座標は $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4 $\vec{a}, \vec{b}$ は平行ではないベクトルで、 $\vec{a}, \vec{b}$ の大きさはそれぞれ 3, 1 であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は正の数 k であるものとする。平面上に OD を対角線とする平行四辺形 OCDA があり、 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{CO} = 5\vec{b}$ である。 $\angle OCD$ の 2 等分線と直線 OA の交点を P_1 とし、 $\vec{OP_1} = \vec{CP_2}$ となるように点 P_2 をとる。直線 CO に関して P_1 と対称な点を P_3 とおき、直線 CP_3 と直線 OA の交点を P_4 とする。

(1) $\vec{OP_1} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a}, \vec{OP_2} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{a} - \boxed{\text{オ}} \vec{b}$ である。

(2) $\vec{OP_3} = -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} k \vec{b}$ である。

(3) $\vec{OP_4} = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}} k + \boxed{\text{ス}}} \vec{a}$ である。また、 $P_3P_4 : P_4C$ の比の値は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} k$ である。

(4) 線分 P_2P_4 が線分 CO と直交するのは $k = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである。

(25 点)

右のページは白紙です。