

D 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ミ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{(x + 7e^4)^2} \quad (x > 0)$$

を考える。ここで、 $\log x$ は自然対数を表し、 e は自然対数の底とする。

この関数の最大値 M は $\frac{1}{16e^8}$ である。このことを用いて、 $f(x)$ が最大値をとるとき x の値 c を求めたい。

まず、 $f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = \frac{x + 7e^4 - \text{ア} x \log x}{x(x + 7e^4)^{\text{イ}}}$$

であり、したがって c は、 $c + 7e^4 = \text{ア} c \log c$ を満たすので

$$M = \frac{1}{\text{ウ} c(c + 7e^4)}$$

となる。よって、 c は関係式

$$c^2 + 7e^4 c - \text{エ} e^{\text{オ}} = 0$$

を満たす。 $c > 0$ であることより

$$c = e^{\text{カ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) 2次正方行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と定め、定数 α, β に対して、

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

とおく。このとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 A^n は、

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{キ}} \alpha^n - \boxed{\text{ク}} \beta^n & -\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}} (\alpha^n - \beta^n) \\ \boxed{\text{サ}} (\alpha^n - \beta^n) & -\boxed{\text{シ}} \alpha^n + \boxed{\text{ス}} \beta^n \end{pmatrix}$$

と表される。以下、 $\alpha = 9, \beta = 8$ とすると、

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} & -\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}} \\ \boxed{\text{ツ}} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = a_2 = 1$ と、関係式

$$a_{n+2} = \frac{17}{6} a_{n+1} - 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすなら、

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\boxed{\text{テ}}} A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\boxed{\text{テ}}}^n A^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。よって

$$a_{n+2} = \frac{1}{\boxed{\text{ト}}}^n \left(-\boxed{\text{ナ}} 9^n + \boxed{\text{ニ}} 8^n \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。

右のページは白紙です。

(3) i を虚数単位として, ω を

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\, i}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と定めると, $\omega^3 = 1$ を満たす。コインを 10 回投げて, その結果により数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ を次のように定める。

1 回目に投げた結果が表なら $a_1 = \omega$, 裏なら $a_1 = \omega^2$ と定める。

2 回目に投げた結果が表なら $a_2 = \omega a_1$, 裏なら $a_2 = \omega^2 a_1$ と定める。

同様に, $n = 3, 4, 5, \dots, 10$ に対して,

n 回目に投げた結果が表なら $a_n = \omega a_{n-1}$, 裏なら $a_n = \omega^2 a_{n-1}$ と定める。

(i) a_4 が実数となる確率は, $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(ii) a_{10} が実数となる確率は, $\frac{\boxed{\text{ヒ}} \quad \boxed{\text{フ}} \quad \boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}} \quad \boxed{\text{マ}} \quad \boxed{\text{ミ}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 **2**, **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 関数

$$f(x) = |\log(x+1)| \quad (x > -1)$$

を考える。 a を正の定数とし、 xy 平面において $y = f(x)$ のグラフ上に点 $P(a, f(a))$ をとる。点 P を通り x 軸と平行な直線 l が、このグラフと交わるもう一方の点を $Q(b, f(b))$ とする。 $(b < 0)$

- (1) b を、 a を用いて表せ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの、点 P における接線と点 Q における接線の交点を T とする。 $\triangle TPQ$ の外接円の面積 S を、 a を用いて表せ。
- (3) 直線 l と $y = f(x)$ のグラフで囲まれた部分を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を、 a を用いて表せ。
- (4) (2) で求めた S と (3) で求めた V について

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{V}{S}$$

の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

3

d を正の定数とし、 $f(x) = \frac{1}{d}x^2$ とおく。 xy 平面において、関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ との交点のうち、原点でないものを $P(a, f(a))$ とおく。

次の3つの条件を満たす円 C を考える。

- C は y 軸に接する。
- C は $y = f(x)$ のグラフと点 P で接する。つまり、 C とこのグラフは点 P において共通の接線をもつ。
- C の中心は、連立不等式 $y > \frac{1}{d}x^2$, $x > 0$ の表す領域にある。

この円 C の中心を $A(r, f(a) + h)$ とし、円 C と y 軸の接点を $Q(0, f(a) + h)$ とする。

(1) 放物線 $y = \frac{1}{d}x^2$ の点 P における法線の傾きを求めよ。

(2) r と h を、 d を用いて表せ。

(3) 2点 P, Q を通る直線 l の方程式を、 d を用いて表せ。

(4) (3) で求めた直線 l と $y = f(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を S_1 、点 P を通り x 軸に平行な直線と $y = f(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。