

E 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から 二 までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) a を定数として x についての方程式

$$9^x + 9^{-x} - (a+1)(3^x + 3^{-x}) - 2a^2 + 8a - 4 = 0$$

を考える。 $t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと、 x がすべての実数を動くとき、 t のとる値の範囲は $t \geq$ ア であり、上の方程式は

$$t^2 - (a+1)t - 2(a^2 - 4a + \text{イ}) = 0$$

となる。この t についての 2 次方程式が、 $t \geq$ ア の範囲に少なくとも 1 つ解をもつための必要十分条件は

$$a \leq \text{ウ} \quad \text{または} \quad a \geq \text{エ}$$

である。特に $a = -5$ のとき、最初に考えた方程式の解は

$$x = \log_3 \left(\text{オ} \pm \sqrt{\text{カキ}} \right)$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) 定数 a, b ($a > 0$) に対し, xy 平面において放物線

$$C_1 : y = ax^2 + 2ax + 2a - b$$

を考える。 x 軸に関して C_1 と対称な放物線を, x 軸方向へ 4, y 軸方向へ 8 だけ平行移動したものを C_2 とすると, その頂点の x 座標は ク である。また C_2 の頂点の y 座標が 9 ならば, $b = a +$ ケ が成り立つ。さらにこのとき C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点をもつのは, $a = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ の場合のみであり, その共有点の座標は (シ, ス) となる。

右のページは白紙です。

(3) 関数

$$f(x) = \frac{7x^3 + 23x^2 + 21x + 15}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$$

を考える。

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{セ}}x + \boxed{\text{ソ}}}{x^2 + 1} + \frac{\boxed{\text{タ}}x + \boxed{\text{チ}}}{(x + 1)^2}$$

である。したがって、

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} + \boxed{\text{ト}} \log 2 + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \pi$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 **2**, **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 座標平面において、 C_1 を原点を中心とする半径 2 の円とし、 C_2 を点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。 C_1 と C_2 の両方と接する円を考える。

- (1) 円 D_1 は C_1 と内接し、さらに C_2 と外接しているとする。 D_1 の中心の座標を $(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$ と表すとき、 r_1 を θ を用いて表せ。
- (2) 円 D_2 は C_1 と内接し、さらに C_2 と内接しているとする。 D_2 の中心の座標を $(r_2 \cos \theta, r_2 \sin \theta)$ と表すとき、 r_2 を θ を用いて表せ。
- (3) $f(\theta) = r_1 - r_2$ とおく。ここで r_1, r_2 はそれぞれ (1), (2) で求めた θ の関数である。 $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

3

2つの正の定数 a と p に対し、関数

$$f(x) = a^p x e^{-ax^2} \quad (x \geq 0)$$

を考える。ただし、 e は自然対数の底である。

xy 平面において、 $y = f(x)$ のグラフ上の点で、 y 座標が最大となる点を M とおく。

- (1) 点 M の座標を a と p を用いて表せ。
- (2) p を固定したまま、 a を正の範囲で動かすとき、点 M はある関数 $y = g(x)$ のグラフ上を動く。この関数 $g(x)$ を求め、そのグラフを p の値で場合分けして図示せよ。
- (3) $x > 0$ の範囲で、(2) の $y = g(x)$ のグラフ上の点から原点までの距離の最小値が存在するような p の値の範囲を求め、このとき、その最小値を与える x の値を p を用いて表せ。

(30 点)

右のページは白紙です。