

F 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から レ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 原点を O とする xy 平面上の点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は、その座標 (x_n, y_n) が条件

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているものとする。このとき、

$$|\overrightarrow{OP_{n+1}}| = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} |\overrightarrow{OP_n}|$$

$$\overrightarrow{OP_{n+1}} \cdot \overrightarrow{OP_n} = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} |\overrightarrow{OP_n}|^2$$

である。 $\triangle P_n OP_{n+1}$ の面積を S_n とおくと、

$$S_n = \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}} \left(\frac{1}{\text{キ}} \right)^{n-1}$$

であり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$$

である。

右のページは白紙です。

- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。 xy 平面において、原点 O を中心とする半径 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ の円 C_1 上の点 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta, \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$ から、 O を中心とする半径 1 の円 C_2 への接線の接点を Q, Q' とする。これらの点の座標は、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある α を用いて

$$Q(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha)), \quad Q'(\cos(\theta - \alpha), \sin(\theta - \alpha))$$

と表される。このとき、 $\alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である。点 Q'' を x 軸に関して点 Q' と対称な位置にある点とする。点 $A(2\sqrt{2}, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_3 上に点 R を

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ''}$$

となるようにとる。

θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき、線分 QR の長さの 2 乗は、

$$\theta = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi, \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi \text{ (順不同) のとき最小値 } \boxed{\text{タ}} \text{ をとり,}$$

$$\theta = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi \text{ のとき最大値 } \boxed{\text{テ}}\boxed{\text{ト}} + \boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} \text{ をとる。}$$

右のページは白紙です。

(3) (i) 3で割り切れる2桁の自然数の総和は

ヌ	ネ	ノ	ハ
---	---	---	---

 である。

また、2または3で割り切れる2桁の自然数は全部で

ヒ	フ
---	---

 個あり、その総和は

ヘ	ホ	マ	ミ
---	---	---	---

 である。

(ii) $256 = 2^8$ の正の約数は全部で

ム

 個あり、その総和は

メ	モ	ヤ
---	---	---

 である。

また、 $2304 = 2^8 \cdot 3^2$ の正の約数は全部で

ユ	ヨ
---	---

 個あり、その総和は

ラ	リ	ル	レ
---	---	---	---

 である。

右のページは白紙です。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 xy 平面において、2つの放物線

$$C_1: y = 2x^2$$

$$C_2: y = (x - t)^2 + e^{-4t^2}$$

を考える。ここで、 t は定数であり、 e は自然対数の底である。

(1) すべての t に対して、2つの放物線 C_1, C_2 は2点で交わることを示せ。

2つの放物線 C_1, C_2 の交点の x 座標を小さい順に α, β とする。

(2) $\beta - \alpha$ を、 t を用いて表せ。

(3) 2つの放物線 C_1, C_2 で囲まれる図形の面積 S を、 t を用いて表せ。

(4) t が実数全体を動くとき、上で求めた S の最小値と、それを与える t の値を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

3

実数 a, b に対して, xy 平面における 3 点

$$A(a-1, b), \quad B(a, b+3), \quad C(a+1, b)$$

を頂点とする $\triangle ABC$ の周および内部を D とおく。 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 , x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とおく。

(1) V_1 について, 以下の問に答えよ。

(i) $a \geq 1$ のとき, V_1 を求めよ。

(ii) $0 < a < 1$ のとき, V_1 を求めよ。

(2) V_2 について, 以下の問に答えよ。

(i) D が x 軸と共有点をもつ b の値の範囲を求めよ。

(ii) b が上で求めた範囲を動くとき, V_2 の最大値と最小値を求めよ。

(3) $a = 5$ のとき, $V_1 = V_2$ となる b の値を求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。