

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

以下の問題 **1** から **3** において、 $\square$ 内のカタカナの 1 文字にあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数で表しなさい。また、根号内の $\square$ に対しては、根号の中に現れる正の整数が最小となる形で答えなさい。なお、**ア** のようなカタカナ 1 文字は 1 ^{けた}桁の数を表し、**アイ** のようなカタカナ 2 文字は 2 桁の数を表す。

1 (14 点)

O を原点とする座標空間に、3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{5}, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{6})$ がある。原点 O から $\triangle ABC$ へ垂線を下ろし、 $\triangle ABC$ との交点を H とする。

このとき、

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \square$ ア である。

(2) $\cos \angle BAC = \frac{\square}{\square} \sqrt{\square}$ $\frac{\text{イ}}{\text{ウエ}} \sqrt{\text{オカ}}$ である。

(3) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\square}{\square} \sqrt{\square}$ $\frac{\text{キ}}{\text{ク}} \sqrt{\text{ケコ}}$ である。

(4) $|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{\square}{\square}$ $\frac{\text{サシ}}{\text{スセ}}$ である。

右のページは白紙です。

2 (15 点)

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。整数 n は不等式

$$5 \times 6^{40} \leq n \leq 3 \times 5^{45}$$

を満たすとする。

このとき、

(1) n は **アイ** けた桁の整数である。

(2) $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ の値および不等式 $\sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50}$ を用いると、 $\log_{10} 7$ の、小数第一位の数字は **ウ** であり、小数第二位の数字は **エ** である。

(3) 5×6^{40} の最高位の数字は **オ** であり、 3×5^{45} の最高位の数字は **カ** である。

右のページは白紙です。

3 (16 点)

a, b, c, k は実数の定数で, $a \neq 0, k \neq 0$ とする。2 つの関数

$$f(x) = ax^3 + bx + c, \quad g(x) = 2x^2 + k$$

に対して, 合成関数に関する等式

$$g(f(x)) = f(g(x))$$

がすべての x について成り立つとする。

このとき,

(1) $a = \boxed{\text{ア}}, b = -\boxed{\text{イ}}, c = \boxed{\text{ウ}}, k = -\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) $g(f(x)) = f(g(x)) = px^6 + qx^4 + rx^2 + s$ (p, q, r, s は定数)

とおく。このとき,

$$p = \boxed{\text{オカ}}, q = -\boxed{\text{キク}}, r = \boxed{\text{ケコ}}, s = -\boxed{\text{サ}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **4** および **5** の解答はそれぞれの解答用紙に記入しなさい。

4 (30 点)

次の 2 つの関数を考える。

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x, \quad g(x) = \sin x$$

このとき、以下の設問に答えよ。ただし、必要ならば、次の公式を用いても良い。

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

- (1) $0 \leq x \leq \pi$ において、 $f(x)$ の極大値とそのときの x の値および $f(x)$ の極小値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) 座標平面において、曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) のグラフの概形を描け。ただし、曲線の凹凸および変曲点は調べなくてよい。
- (3) 実数 k に対して、次の条件 (A) を考える。

$$(A) \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \text{ の範囲のすべての } x \text{ に対して,} \\ \text{不等式 } k g(x) \leq f(x) \text{ が成り立つ.} \end{cases}$$

条件 (A) を満たす実数 k に対して、座標平面において、連立不等式

$$k g(x) \leq y \leq f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

で表される領域の面積を $S(k)$ とする。

このとき、

- (i) $S(k)$ を k の式で表せ。
- (ii) $S(k)$ の最小値とそのときの k の値を求めよ。

右のページは白紙です。

5 (25 点)

数列 $\{L_n\}$ を

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

このとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 漸化式 $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ を、実数 α, β ($\alpha > \beta$) を用いて、

$$L_{n+1} - \beta L_n = \alpha (L_n - \beta L_{n-1}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$L_{n+1} - \alpha L_n = \beta (L_n - \alpha L_{n-1}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表すとき、 α と β を解とする 2 次方程式を、 α と β を含まない形で求めよ。なお、2 次方程式の変数として x を用いよ。

- (2) 数列 $\{L_n\}$ の一般項 L_n を n の式で表せ。

- (3) n が負でない整数のとき、 $(L_n)^2 - L_{2n}$ の値を求めよ。

- (4) 正の奇数 n に対して、次の条件 (A) を考える。

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{不等式 } L_{2n} \leq p^2 \leq L_{2n+2} \text{ を満たす正の整数 } p \text{ が} \\ \text{ちょうど 17 個存在する。} \end{array} \right.$$

条件 (A) を満たす正の奇数 n の値を求め、さらに、その n に対して、不等式 $L_{2n} \leq p^2 \leq L_{2n+2}$ を満たす正の整数 p の最小数を求めよ。

問題は、このページで終わります。