

$$(1) (a) -[\text{ア}][\text{イ}] = -13 \quad (b) -[\text{ウ}][\text{エ}] = -38$$

$$(2) (a) \frac{[\text{オ}]}{[\text{カ}]} = \frac{2}{3} \quad (b) \frac{[\text{キ}]}{[\text{ク}][\text{カ}]} = \frac{8}{27}$$

$$(3) (a) [\text{コ}] = 0 \quad (b) \left([\text{サ}], [\text{シ}], \frac{h}{[\text{ス}]} \right) = \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \quad (c) \sqrt{[\text{セ}]} = \sqrt{2} \quad (d) \frac{\sqrt{[\text{ソ}]} }{[\text{タ}]} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

(1) 加法定理を用いて、

$$f(\theta) = \sin \theta + \sin(\pi - t - \theta) = \sin \theta + \sin(t + \theta) = 2 \sin \frac{2\theta + t}{2} \cos \frac{t}{2} \text{ と変形され、}$$

この値が最大値となるのは $\sin \frac{2\theta + t}{2} = 1$ となるとき。つまり $\frac{2\theta + t}{2} = \frac{\pi}{2}$ のときで、

$$\theta = \frac{\pi - t}{2} \text{ となるときである。}$$

(実際 $\pi - t > 0$ より、 $\pi - t > \frac{\pi - t}{2} > 0$ で、 $\theta = \frac{\pi - t}{2}$ をとりうる。)

また、このときの $f(\theta)$ の最大値は $m(t) = 2 \cos \frac{t}{2}$ となる。

$$\text{以上より、} \theta = \frac{\pi - t}{2}, m(t) = 2 \cos \frac{t}{2}$$

(2) $g(t) = \sin t + 2 \cos \frac{t}{2}$ で、

$$g'(t) = \cos t - \sin \frac{t}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} = -\left(2 \sin \frac{t}{2} - 1\right) \left(\sin \frac{t}{2} + 1\right) \text{ となるため、}$$

増減表は、 $0 < t < \pi$ で $\sin \frac{t}{2} + 1 > 0$ なので、

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

で、 $g(t)$ の値が最大になるような $t = \frac{\pi}{3}$ で、そのときの最大値 $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ とわかる。

(3)

(a) t は三角形の内角であり、 0 から π までのすべての値をとりうるので、
(三角形を形成するので、 0 と π は除く。)

求める t の範囲は $0 < t < \pi$ となる。

(b) 正弦定理より $AB = 2 \sin \theta$, $AC = 2 \sin(\pi - t - \theta)$ が得られるため、線分 AB と線分 AC の長さの和は、(1) の関数 $f(\theta)$ を用いて

$$AB + AC = 2 \{ \sin \theta + \sin(\pi - t - \theta) \} = 2f(\theta)$$

と表せる。

(1) の結論より、 $AB + AC$ は $\theta = \frac{\pi - t}{2}$ のとき最大となる。

このとき、頂点 B における内角は $\pi - (t + \theta) = \pi - (\pi - 2\theta + \theta) = \theta$ となり、

頂点 B と頂点 C の大きさが等しくなる。

よって求める必要十分条件は、三角形 ABC が $AB = AC$ なる二等辺三角形になることである。

(c) 線分 BC の長さは正弦定理より $2 \sin t$ である。

(b) の条件を満たすとき三角形 ABC の 3 辺の長さの和は (2) の関数 $g(t)$ を用いて

$$AB + AC + BC = 2 \cdot 2 \cos \frac{t}{2} + 2 \sin t = 2 \cdot g(t)$$

と表せる。

(2) の結論より、 $g(t)$ の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

よって求める三角形 ABC の 3 辺の長さの和の最大値は $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ である。

(1) 直接計算することにより、 $A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。

$$(2) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ より } P_2(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$$

(1)より、 $A^2 \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ で、 P_3 の座標は $(6, 4)$

P_3 は OP_1 の中点であるので、 $\triangle P_1P_2P_3$ の面積は $\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} \triangle OP_1P_2$ となる。

従って、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{8 \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) - (3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \cdot 12\} = 12\sqrt{2} - 5\sqrt{6} \text{ となる。}$$

(3) $A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より $\overline{OP_{2n+1}} = \frac{1}{2} \overline{OP_{2n-1}}, \overline{OP_{2n+2}} = \frac{1}{2} \overline{OP_{2n}}$ となることがわかる。

$$\overline{OP_{2n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \overline{OP_{2n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ で、 } \triangle P_1P_{2n}P_{2n+1} \text{ の面積は、}$$

$$S_n = \frac{\overline{OP_1} - \overline{OP_{2n+1}}}{\overline{OP_1}} \times \triangle OP_1P_{2n}$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \times \frac{1}{2} \left\{8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \cdot 12\right\}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \times (48\sqrt{2} - 20\sqrt{6}) \text{ となり、 } n \rightarrow \infty \text{ のとき、これは } 0 \text{ となる。}$$

従って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ となる。

(4) $n \rightarrow \infty$ のとき、 P_{2n} は原点 O に近づき、このとき、(3)の S_n が

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ となったことから、 T_n は、 U_n を $\triangle P_{2n-1}P_{2n}P_{2n+1}$ の面積として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \text{ を考えられる。}$$

$$U_n = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1} \cdot U_1 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1} (12\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) \text{ となるため、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{k-1} (12\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) = (12\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

となる。

従って $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 16\sqrt{2} - \frac{20}{3}\sqrt{6}$ となる。