

- (1) 半径 r の円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$ で表わされる.

この円の, $x = x_i$ における y の弦長は $\sqrt{r^2 - x_i^2} - (-\sqrt{r^2 - x_i^2}) = 2\sqrt{r^2 - x_i^2}$

で表わされる. これを x 軸に沿って $x = -r$ から $x = r$ まで足し合わせると円の面積が得られる.

すなわち, $2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ は半径 r の円の面積を表す.

$2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2$ であることを示す.

$x = r \cos \theta$ とおいて

$$2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^\pi r^2 \sin^2 \theta d\theta$$

$$= r^2 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= r^2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi$$

$$= \pi r^2 \quad (\text{証終})$$

- (2) 半径 r の球は, 半径 r の円板 $x^2 + y^2 \leq r^2$ を x 軸について 1 回転させたときの通過部分で表わされる.

この球の, $x = x_i$ における球の断面積は, (1) より $\pi (\sqrt{r^2 - x_i^2})^2$ で表わされる.

これを x 軸に沿って $x = -r$ から $x = r$ まで足し合わせると球の体積が得られる.

すなわち, $\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$ は半径 r の球の体積を表す.

$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3} \pi r^3$ であることを示す.

$$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \left[xr^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{証終})$$

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}}$ が最大のときに不等式を満たせば、いかなる $\{a_n\}$ についても不等式は満たされる。

条件(H)を満たす数列の中で、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}}$ を最大にするものはすべての n について $a_n = 1$ というものである。

$$\text{このとき } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

よって、

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{4} + \frac{u}{8} \leq \frac{1}{8}$$

を満たす確率を求めればよい。

左辺の各項は 0 以上であり、 $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}, \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ なので

$$s = t = 0$$

このとき $u = 0, 1$ はどちらも不等式を満たす。

よって、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{4} \quad \dots(\text{答})$$

- (2) 左辺の各項は 0 以上であり、 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ なので

$$s = 0$$

$$\text{このとき } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{16}{3} - 4t - 2u$$

(t, u) の組み合わせ毎に $\{a_n\}$ を求める。

- (i) $(t, u) = (0, 0)$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{16}{3} > 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}}$ は最大で 2 であることから不適。

- (ii) $(t, u) = (1, 0)$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$$

なので $a_{2m} = 0, a_{2m-1} = 1$ (m は自然数) と定めればよい。

- (iii) $(t, u) = (0, 1)$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} > 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}}$ は最大で 2 であることから不適。

- (iv) $(t, u) = (1, 1)$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{16}{3} - 4 - 2 = -\frac{2}{3} < 0$$

となり、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} \geq 0$ なので不適。

以上より、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= -x^2 + \frac{\pi^2}{4} \\
 f'(x) &= -2x \\
 \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 &= 0, \quad \left\{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 = \pi^2 \text{ より } \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 < \left\{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \\
 \{f(0)\}^2 &= \frac{\pi^4}{16}, \quad \{f'(0)\}^2 = 0 \text{ より } \{f(0)\}^2 > \{f'(0)\}^2
 \end{aligned}$$

よって, x_1, x_2 の例として $x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = 0$ があげられる ...(答)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (a) \quad h(x) &= g'(x) \cos x \\
 &= \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)' \cos x \\
 &= \left\{\frac{\sin x}{\cos^2 x} f(x) + \frac{1}{\cos x} f'(x)\right\} \cos x \\
 &= f'(x) + g(x) \sin x \quad \text{(証終)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \lim_{x \rightarrow +0} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x} \\
 &= -f'\left(\frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

となり, 極限值

$$\lim_{x \rightarrow +0} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

が定まることが示された. (証終)

また,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +0} g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= a
 \end{aligned}$$

より, $\lim_{x \rightarrow +0} g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = a$ が示された. (証終)

$$\begin{aligned}
 (c) \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 f'(-x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \quad (\because f(x) \text{ は偶関数}) \\
 &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= -f'(x) \\
 \therefore f'(x) + f'(-x) &= 0 \quad \text{(証終)}
 \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +0} h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} \\
 &= -a + a \cdot 1 \\
 &= 0 \quad \text{...(答)} \\
 \lim_{x \rightarrow +0} h\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{f'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + g\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
 &= a + a \cdot (-1) \\
 &= 0 \quad \text{...(答)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 &= \{h(x) - g(x) \sin x\}^2 - \{g(x) \cos x\}^2 \\
 &= \{h(x)\}^2 - 2h(x)g(x) \sin x - \{g(x)\}^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
 &= \{h(x)\}^2 - \frac{1}{2} G'(x)
 \end{aligned}$$

が成立. よって

$$G'(x) = 4g'(x)g(x) \sin x \cos x + 2\{g(x)\}^2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

ここで, x の関数

$$\{g(x) \cos x + g(x) \sin x\}^2 - \{g(x)\}^2$$

を考える. この関数の導関数は

$$\begin{aligned}
 2g(x)(\cos x + \sin x) \{g'(x)(\cos x + \sin x) + g(x)(\cos x - \sin x)\} - 2g(x)g'(x) \\
 = 4g'(x)g(x) \sin x \cos x + 2\{g(x)\}^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
 = G'(x)
 \end{aligned}$$

となるので, C を積分定数として

$$G(x) = \{g(x) \cos x + g(x) \sin x\}^2 - \{g(x)\}^2 + C$$

と表わせる.

$$G(0) = \{g(0)\}^2 - \{g(0)\}^2 + C$$

$$= C$$

$G(0) = 0$ より $C = 0$ となる.

$$\therefore G(x) = \{g(x) \cos x + g(x) \sin x\}^2 - \{g(x)\}^2 \quad \text{...(答)}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} G'(x) dx &= \left[G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
 &= \left\{g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 - \left\{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 - \left\{g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 + \left\{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって $\{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 = \{h(x)\}^2 - \frac{1}{2} G'(x)$ の両辺を

$x = -\frac{\pi}{2}$ から $x = \frac{\pi}{2}$ まで積分して

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2\right] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{h(x)\}^2 dx$$

を得る. (証終)

また, この等式より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)\}^2 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{h(x)\}^2 dx$$

が得られ,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{h(x)\}^2 dx \geq 0$$

より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)\}^2 dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx \geq 0$$

が言える. すなわち

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)\}^2 dx$$

である. (証終)