

1

$$(1) \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{3}{4} \quad \boxed{\text{ウ}} = 0 \quad \pm \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}a}{\boxed{\text{オ}}} = \pm \frac{\sqrt{2}a}{3} \quad -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}a^2 = -\frac{1}{3}a^2 \quad \boxed{\text{ク}} = 0 \quad \boxed{\text{ケ}} = 0$$

$$(2) \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}(\boxed{\text{サ}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}})}{\boxed{\text{ス}}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4} \quad \frac{\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$$

$$(3) (a) \boxed{\text{あ}} \ 6 \quad \boxed{\text{い}} \ 7 \quad \boxed{\text{う}} \ 2 \quad \boxed{\text{え}} \ 1 \quad \boxed{\text{お}} \ 1 \quad \boxed{\text{か}} \ 0$$

$$x^2 - \boxed{\text{テ}}x - \boxed{\text{ト}} = x^2 - 1 \cdot x - 1 \quad \frac{\boxed{\text{ナ}} + \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \boxed{\text{ネ}} = 5$$

$$(b) \boxed{\text{き}} \ 2 \quad \boxed{\text{く}} \ 1 \quad \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}} - \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

2

(1) 点 A における C の接線 l は、 $y' = 2x$ より

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

となる。同様に点 B における C の接線 m は、

$$y = 2bx - b^2$$

よってこの交点 P は

$$\begin{aligned} 2ap - a^2 &= 2bp - b^2 \\ 2(a-b)p &= a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

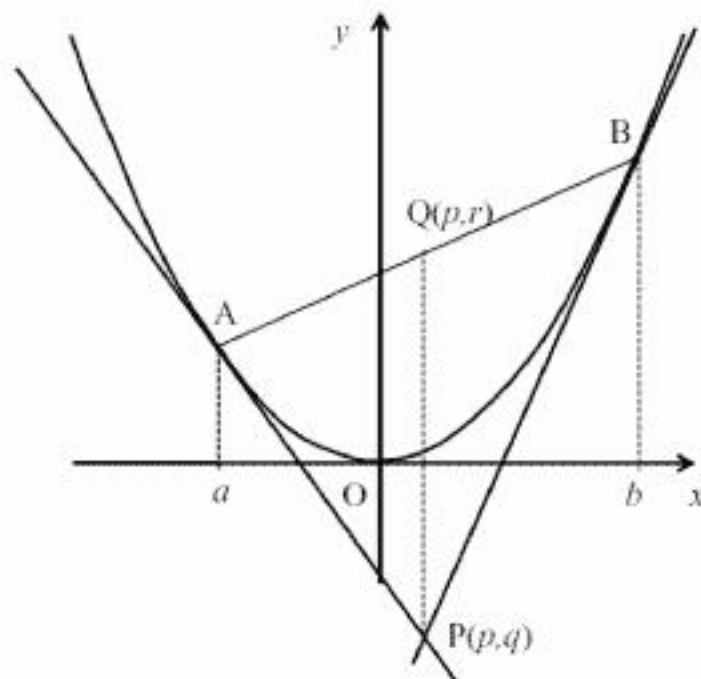
$a < b$ より

$$p = \frac{a+b}{2}$$

元の式に代入すると

$$\begin{aligned} q &= 2ap - a^2 = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 \\ &= ab \end{aligned}$$

である。よって P は $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$ である。



(2) 直線 AB は、傾きが $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ なので、

$$\begin{aligned} y &= (a+b)(x-a) + a^2 \\ &= (a+b)x - ab \end{aligned}$$

よって点 P を通り、 x 軸に垂直な直線との交点の y 座標は

$$\begin{aligned} r &= (a+b)p - ab \\ &= (a+b) \cdot \frac{a+b}{2} - ab \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

よって線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned} PQ &= r - q \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - ab \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \end{aligned}$$

である。

(3) 三角形 APB の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}PQ \times (p-a) + \frac{1}{2}PQ \times (b-p) \\ &= \frac{1}{2}PQ \times (b-a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(b-a)^2 \times (b-a) \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^3 \end{aligned}$$

となる。

(4) 直線 AB と接線 m が直交するので、その条件は

$$\begin{aligned} (a+b) \times 2b &= -1 \\ \therefore a &= -b - \frac{1}{2b} \end{aligned}$$

接線 l と接線 m のなす角を θ とすると、それぞれの傾きが $2a, 2b$ なので加法定理を用いて

$$\tan \theta = \frac{2a - 2b}{1 + 2a \times 2b} = \frac{2(a-b)}{1 + 4ab}$$

$$a = -b - \frac{1}{2b} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2\left(-b - \frac{1}{2b} - b\right)}{1 + 4\left(-b - \frac{1}{2b}\right)b} \\ &= \frac{-\left(4b + \frac{1}{b}\right)}{-(4b^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{b} \end{aligned}$$

となる。

(5) 三角形 APB に $a = -b - \frac{1}{2b}$ を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}(b-a)^3 \\ &= \frac{1}{4}\left\{b - \left(-b - \frac{1}{2b}\right)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{4}\left(2b + \frac{1}{2b}\right)^3 \end{aligned}$$

$b > 0$ より相加相乗平均の関係を用いて

$$2b + \frac{1}{2b} \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{1}{2b}} = 2$$

なので、

$$S \geq \frac{1}{4} \cdot 2^3 = 2$$

となる。ただし等号が成り立つのは $2b = \frac{1}{2b}$ より $b = \frac{1}{2}$ のときである。

よって、 $b = \frac{1}{2}$ のとき三角形 APB の面積 S の最小値は 2 になる。

3

(1) $\int_0^x g(t)dt = (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{p}} + k \quad \cdots \textcircled{1}$

①の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} g(x) &= (2ax + b)e^{\frac{x}{p}} + (ax^2 + bx + c) \times \left(-\frac{1}{p}e^{\frac{x}{p}}\right) \\ &= \left\{-\frac{a}{p}x^2 + \left(2a - \frac{b}{p}\right)x + \left(b - \frac{c}{p}\right)\right\}e^{\frac{x}{p}} \end{aligned}$$

と求まる。

また①に $x = 0$ を代入すると

$$(\text{左辺}) = \int_0^0 g(t)dt = 0, (\text{右辺}) = (a \cdot 0 + b \cdot 0 + c)e^0 + k = c + k$$

なので $0 = c + k$ より

$$k = -c$$

となる。

(2) (a)

$$f(x) = (3x - x^2)e^{\frac{x}{2}}$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 - 2x)e^{\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)(3x - x^2)e^{\frac{x}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right)e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right)e^{\frac{x}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 5\right)e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

よって $y = f(x)$ の変曲点は $f''(x) = 0$ より

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 5\right)e^{\frac{x}{2}} &= 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - 5 &= 0 \\ x^2 - 11x + 20 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 80}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{2} \end{aligned}$$

$\alpha < \beta$ より

$$\alpha = \frac{11 - \sqrt{41}}{2}, \beta = \frac{11 + \sqrt{41}}{2}$$

$36 < 41 < 49$ より、 $6 < \sqrt{41} < 7$ が成り立つので、

$$2 = \frac{11 - 7}{2} < \alpha = \frac{11 - \sqrt{41}}{2} < \frac{11 - 6}{2} = \frac{5}{2}$$

よって α に最も近い整数値は 2 である。また、

$$\frac{17}{2} = \frac{11 + 6}{2} < \beta = \frac{11 + \sqrt{41}}{2} < \frac{11 + 7}{2} = 9$$

よって β に最も近い整数値は 9 である。

さて $f'(x) = 0$ のとき $y = f(x)$ は極値をとるので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3\right)e^{\frac{x}{2}} &= 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 &= 0 \\ x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ (x - 1)(x - 6) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 6 \end{aligned}$$

となり、増減表は

x		1		α		6		β	
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+		+
$f''(x)$	−		−	0	+		+	0	−
$f(x)$		極大				極小			

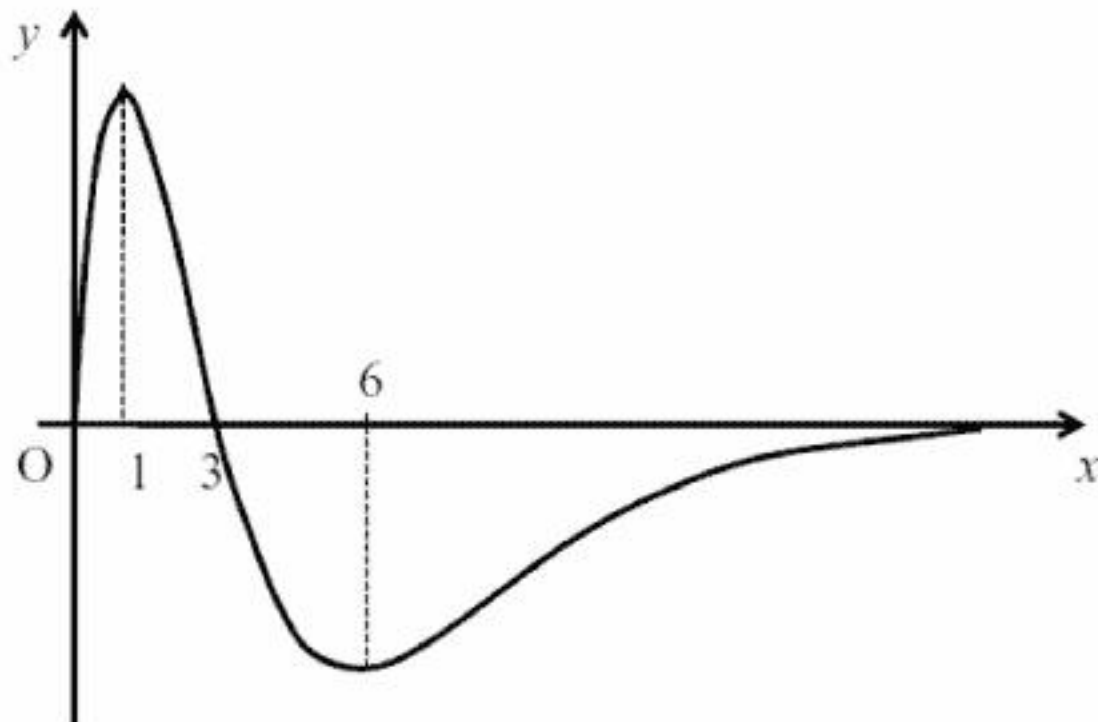
となる。またこの極値の値は

$$\begin{aligned} f(1) &= (3 - 1)e^{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}} \\ f(6) &= (18 - 36)e^{-3} = -18e^{-3} \end{aligned}$$

である。

(b)

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^2}{e^{x/2}} = 0$ であることに注意すると、増減表と合わせて以下のようになる。



よって $0 \leq x$ の範囲で $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(6) &\leq f(x) \leq f(1) \\ -18e^{-3} &\leq f(x) \leq 2e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$e^3 > 20$ より

$$18e^{-3} < \frac{18}{20} = 0.9 < 1$$

また $1 < e < 4$ より $1 < e^{\frac{1}{2}} < 2$ が成り立つので

$$1 = \frac{2}{2} < 2e^{\frac{1}{2}} < \frac{2}{1} = 2$$

以上より

$$-1 < -18e^{-3} \leq f(x) \leq 2e^{\frac{1}{2}} < 2$$

よって $x \geq 0$ の範囲で常に $|f(x)| \leq n$ となるような最小の自然数 n は 2 である。

(c) 曲線 $y = f(x)$ の $y \geq 0$ にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_0^3 f(x)dx$$

である。(1)より

$$(3x - x^2)e^{\frac{x}{2}} = \left\{-\frac{a}{p}x^2 + \left(2a - \frac{b}{p}\right)x + \left(b - \frac{c}{p}\right)\right\}e^{\frac{x}{p}}$$

が成立するためには

$$-1 = -\frac{a}{p}, 3 = 2a - \frac{b}{p}, 0 = b - \frac{c}{p}, 2 = p$$

整理すると

$$a = 2, b = 2, c = 4, p = 2$$

となる。(1)の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 f(x)dx \\ &= (a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c)e^{\frac{3}{p}} - c \\ &= (2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 4)e^{\frac{3}{2}} - 4 \\ &= 28e^{\frac{3}{2}} - 4 \end{aligned}$$

となる。