

$$\boxed{1}$$

(1)

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \text{ であるので、}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \frac{1}{\cos x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{x_n} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} [-\log(1 - \sin x) + \log(1 + \sin x)]_0^{x_n} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x_n}{1 - \sin x_n} \right) \\ &= \log \sqrt{\frac{1 + \sin x_n}{1 - \sin x_n}} \end{aligned}$$

となる。よってこのことから、

$$\int_0^{x_n} \frac{1}{\cos x} dx = n \log \sqrt{3} \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{1 + \sin x_n}{1 - \sin x_n}} = \log \sqrt{3^n}$$

$$\therefore \frac{1 + \sin x_n}{1 - \sin x_n} = 3^n \Leftrightarrow \sin x_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

これに $n=1$ を代入して、

$$\sin x_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 \leq x_n < \frac{\pi}{2}) \quad \dots \text{(答)}$$

(2)

$$(1) \text{ から、 } \sin x_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \quad \dots \text{(答)}$$

(3)

$$0 \leq x_n < \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos x_n > 0 \text{ なので、}$$

$$\cos x_n = \sqrt{1 - \sin^2 x_n} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}}{3^n + 1} \text{ であり、 } \tan x_n = \frac{\sin x_n}{\cos x_n} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}} \text{ である。}$$

$$\text{また、 } V_n = \pi \int_0^{x_n} \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 dx \text{ である。ここで、 } \tan x = t \text{ とすると、}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \text{ であることとあわせて、}$$

$$V_n = \pi \int_0^{\tan x_n} 1 \cdot dt = \pi \cdot \tan x_n = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}} \pi \quad \dots \text{(答)}$$

(4)

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\pi \frac{3^{n+1} - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}}}}{\pi \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3^{n+1} - 1}{3^n - 1} \text{ である。}$$

$$\text{このことと、 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 1}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3 \quad \text{であることより、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_{n+1}}{V_n} = \sqrt{3} \quad \dots \text{(答)}$$

(5)

$$V_{n+2} - 2V_{n+1} + V_n = \pi \left\{ \frac{9 \cdot 3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n+2}{2}}} - 2 \cdot \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}}} \right\} = \pi \left\{ \frac{(12 - 6\sqrt{3})3^n + 2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1}} \right\}$$

$$\text{ここで、 } 12 - 6\sqrt{3} = 6(2 - \sqrt{3}) > 0 \text{ より}$$

$$(12 - 6\sqrt{3})3^n + 2\sqrt{3} - 4 \geq (12 - 6\sqrt{3}) \cdot 3 + 2\sqrt{3} - 4 = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3}) > 0$$

$$\text{さらに、 } 2 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1} > 0 \text{ なので } V_{n+2} - 2V_{n+1} + V_n > 0 \quad (\text{証明終})$$

2

(1)

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ である。よって増減表は以下の通りになり、

$v_1=-\sqrt{2}, f(v_1)=4\sqrt{2}, v_2=\sqrt{2}, f(v_2)=-4\sqrt{2} \dots$ (答)

x	$\dots$	$-\sqrt{2}$	$\dots$	$\sqrt{2}$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}$	$\nearrow$

(2)

$$f(x)-f(v_1)=x^3-6x-4\sqrt{2}=(x+\sqrt{2})^2(x-2\sqrt{2})$$

$$f(x)-f(v_2)=x^3-6x+4\sqrt{2}=(x-\sqrt{2})^2(x+2\sqrt{2})$$

であることから、 $u_1=2\sqrt{2}, u_2=-2\sqrt{2} \dots$ (答)

(3)

$(g(y) \text{ の判別式 }) = a^2 + 160 > 0$ なので、 $g(y)=0$ は必ず異なる 2 実数解をもつ。

$$g(y)=0 \text{ を解くと、 } y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 160}}{2}$$

この 2 解のうち絶対値の小さいほうの解の、その絶対値が b より大きければよい。

(i) $a \leq 0$ のとき 求める条件は

$$\left| \frac{-a - \sqrt{a^2 + 160}}{2} \right| > b \Leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 + 160}}{2} > b \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 160} > 2b - a$$

$2b - a > 0$ より、両辺 2 乗して整理すると、

$$a^2 + 160 > 4b^2 - 4ab + a^2 \Leftrightarrow a > \frac{b^2 - 40}{b}$$

$$a \leq 0 \text{ より、 } \frac{b^2 - 40}{b} < a \leq 0 \dots \textcircled{1}$$

(ii) $a \geq 0$ のとき 求める条件は

$$\left| \frac{-a + \sqrt{a^2 + 160}}{2} \right| > b \Leftrightarrow \frac{-a + \sqrt{a^2 + 160}}{2} > b \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 160} > 2b + a$$

$2b + a > 0$ より、両辺 2 乗して整理すると、

$$a^2 + 160 > 4b^2 + 4ab + a^2 \Leftrightarrow a < \frac{40 - b^2}{b}$$

$$a \geq 0 \text{ より、 } 0 \leq a < \frac{40 - b^2}{b} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、 } \frac{b^2 - 40}{b} < a < \frac{40 - b^2}{b} \dots \text{ (答) }$$

また、このような a が存在する条件は、

$$\frac{b^2 - 40}{b} < 0 < \frac{40 - b^2}{b} \Leftrightarrow b^2 < 40 \Leftrightarrow 0 < b < 2\sqrt{10} \quad (\because b > 0) \dots \text{ (答) }$$

(4)

$g(y)=0$ の 2 解を $y=\alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とすると、 $g(0)=-40 < 0$ より $\alpha < 0, \beta > 0$ である。

$f(x)=\alpha$ の実数解と $f(x)=\beta$ の実数解が $(g \circ f)(x)=0$ の実数解である。ここで

$y=f(x)$ のグラフ (下図) より、 α, β のうち 1 つでも絶対値が $4\sqrt{2}$ 以下であれば、

$y=f(x)$ と $y=\alpha, y=\beta$ との交点、つまり $f(x)=\alpha, f(x)=\beta$ の実数解が合わせて 3

個以上になり、 $(g \circ f)(x)=0$ の実数解が 2 個であることに反する。逆に α, β の絶対

値がともに $4\sqrt{2}$ より大きいときは、 $y=f(x)$ と $y=\alpha, y=\beta$ との交点が合わせて 2

個となり題意を満たす。

(3) の答を用いると、求める a の条件は

$$\frac{(4\sqrt{2})^2 - 40}{4\sqrt{2}} < a < \frac{40 - (4\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \dots \text{ (答) }$$

また、 $\alpha < 0, \beta > 0$ より $y=\alpha, y=\beta$ はグラフのような位置にあるので

求める大小関係は $x_1 < u_2 < u_1 < x_2 \dots$ (答)

