

(1)

$$(a) \quad -\boxed{\text{ア}} < a < \boxed{\text{イ}}, \quad \boxed{\text{ウ}} < a < \boxed{\text{エ}} = -1 < a < 0, \quad 1 < a < 2$$

$$(b) \quad \boxed{\text{オ}} - \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \times \sqrt{\boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}} = 1 - \frac{1}{2} \times \sqrt{14}$$

(2)

$$(a) \quad -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} = -\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$

$$(b) \quad -\frac{\boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}} = -\frac{171}{200}, \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\boxed{\text{シ}}} = \frac{21}{29}$$

(3)

$$(a) \quad \boxed{\text{ア}} = 8$$

$$(b) \quad \boxed{\text{イ}} = 0$$

$$(c) \quad \frac{\boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}} = \frac{457}{364}$$

(1) (a)

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} + \sqrt{2} & -\sqrt{6} + \sqrt{2} \\ \sqrt{6} - \sqrt{2} & \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

(b) (a)で求めた行列を T とおく.

P を原点周りに -15° 回転させた点と x 軸について対称な点を原点周りに 15° 回転させると Q になるので,

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \overline{OP} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & -\cos 30^\circ \end{pmatrix} \overline{OP} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \therefore Q &\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \right) \quad \dots (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

(a) 175, 1323, 5832 をそれぞれ素因数分解すると

$$5^2 \cdot 7, 3^3 \cdot 7^2, 2^3 \cdot 3^6$$

となるので, 与式を満たす最小の a について $a^2 = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}\therefore a &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 3780 \quad \dots (\text{答})\end{aligned}$$

(b) (a)の過程より, m は

$5^2 \cdot 7, 3^3 \cdot 7, 2 \cdot 3^2$ を因数に持つ
これを満たす最小の自然数は,

$$m = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150 \quad \dots (\text{答})$$

- (1) $\triangle OAC, \triangle OBC$ にそれぞれ余弦定理を使って

$$AC^2 = (x-1)^2 + y^2 + 1 = 1 + (x^2 + y^2 + 1) - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \cdot \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = x^2 + (y-1)^2 + 1 = 1 + (x^2 + y^2 + 1) - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} \cdot \cos 45^\circ$$

この連立方程式を解いて,

$$(x, y) = (1, \sqrt{2}) \quad \dots(\text{答})$$

- (2) 点 D の座標は実数 d を用いて

$$D(d, \sqrt{2}d, d)$$

と表わされる.

$$\begin{aligned} \therefore AD &= \sqrt{(d-1)^2 + (\sqrt{2}d)^2 + d^2} \\ &= \sqrt{4\left(d - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

よって AD の長さが最も短くなるとき $d = \frac{1}{4}$

$$\text{すなわち } D\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \dots(\text{答})$$

$$\text{このとき } AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots(\text{答})$$

- (3) 求める点 D の座標を実数 t を用いて, $D(t, \sqrt{2}t, t)$ とおく.

三角形 ABD の面積が最小となるのは, AB を底辺とした高さが最小となるときである. つまり, 点 D から直線 AB に下した垂線の足を H とし, この DH が最小になるとき, 三角形 ABD も最小になる.

$$H(s, 1-s, 0) \text{ とすると, } \overrightarrow{DH} = (s-t, 1-s-\sqrt{2}t, -t)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH} = -(s-t) + (1-s-\sqrt{2}t) = 0$$

$$\therefore s = \frac{(1-\sqrt{2})t+1}{2}$$

$$\begin{aligned} DH^2 &= (s-t)^2 + (1-s-\sqrt{2}t)^2 + (-t)^2 \\ &= \left\{ \frac{(1-\sqrt{2})t+1}{2} - t \right\}^2 + \left\{ 1 - \frac{(1-\sqrt{2})t+1}{2} - \sqrt{2}t \right\}^2 + t^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (5+2\sqrt{2})t^2 - 2(1+\sqrt{2})t + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (5+2\sqrt{2}) \left(t - \frac{1+3\sqrt{2}}{17} \right)^2 + \frac{10-4\sqrt{2}}{17} \right\} \end{aligned}$$

以上より, $t = \frac{1+3\sqrt{2}}{17}$ のとき最小をとる.

このときの D の座標は,

$$D\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{17}, \frac{6+\sqrt{2}}{17}, \frac{1+3\sqrt{2}}{17}\right) \quad \dots(\text{答})$$