

(1)	ア	1	イ	2	ウ	0	エ	2	オ	1	カ	9
(2)	キ	2	ク	2	ケ	3	コ	3	サ	6		

[解説]

(1)

(i) アイ

$\log_3(a+1) = \log_3 a + 1$ は、真数条件より $a > 0$ で、

$\log_3(a+1) = \log_3 3a$ より $a+1 = 3a$ で $a = \frac{1}{2}$ となる。

(これは真数条件 $a > 0$ を満たしている。)

(ii) ウエ

$\log_3(2a) > 2\log_3 a$ は、真数条件より $a > 0$ で、

$\log_3(2a) > \log_3 a^2$ より、対数の底が1より大きいことから $2a > a^2 \Leftrightarrow a(a-2) < 0$ となり、この解は $0 < a < 2$ となる。

(これは真数条件 $a > 0$ を満たしている。)

(iii) オカ

$\log_3(a^2) > (\log_3 a)^2$ は、真数条件より $a > 0$ で、

$(\log_3 a)^2 - 2\log_3 a < 0 \Leftrightarrow \log_3 a \{(\log_3 a) - 2\} < 0$ で、対数の底が1より大きいことか

ら、 $0 < \log_3 a < 2 \Leftrightarrow 1 < a < 9$ となることがわかる。

(これは真数条件 $a > 0$ を満たしている。)

(2)

(i) キ

$3^{b+1} = 3^b + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^b = 1$ で、 $3^b = \frac{1}{2}$ の両辺対数をとって、

$b = -\log_3 2 = -f(2)$ となる。

(ii) クケ

$3^{4b} < 4 \cdot 3^b$ の両辺の底を3とした対数をとっても大小は変わらないので、

$4b < 2\log_3 2 + b = 2f(2) + b$ で、 $b < \frac{2}{3}f(2)$ とわかる。

(iii) コサ

$3^{2b} \geq k \cdot 3^b - k - 3$ において、 $t = 3^b$ ($t > 0$) と置き、整理すると

$t^2 - kt + k + 3 \geq 0$ となる。

$h(t) = t^2 - kt + k + 3 = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k + 3$ と置いたときに、 $t > 0$ の範囲で $h(t) \geq 0$ と

なればよいので、

$$\begin{cases} \text{(ア)} & h(t) \text{ の軸} > 0 \text{ かつ } h(t) \text{ の判別式 } D \leq 0 \\ \text{(イ)} & h(t) \text{ の軸} \leq 0 \text{ かつ } h(0) \geq 0 \end{cases}$$

のいずれかであればよい。

(ア) の場合

$$h(t) \text{ の軸} > 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} > 0 \Leftrightarrow k > 0$$

$$D = k^2 - 4k - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq k \leq 6$$

合わせて、 $0 < k \leq 6$

(イ) の場合

$$h(t) \text{ の軸} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} \leq 0 \Leftrightarrow k \leq 0$$

$$h(0) = k + 3 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -3$$

合わせて、 $-3 \leq k \leq 0$

(ア) (イ) より、求める実数 k の範囲は $-3 \leq k \leq 6$ である。

- (1)

ア	3	イ	4	ウ	0	エ	1	オ	1	カ	6	キ	0
ク	3	ケ	2	コ	3	サ	1	シ	1	ス	2	セ	5
ソ	2	タ	5	チ	4	ツ	3	テ	2				
- (2)

ク	3	ケ	2	コ	3	サ	1	シ	1	ス	2	セ	5
ソ	2	タ	5	チ	4	ツ	3	テ	2				

[解説]

(1)
アイウ

$f'(x)=3x^2+2px+q$ で、今 $f'(x)$ は $x=0,-\frac{1}{2}$ で極値を持つことから、
 $f'(x)=3x\left(x+\frac{1}{2}\right)=3x^2+\frac{3}{2}x$ と書けるため、上式と係数比較することにより、
 $p=\frac{3}{4},q=0$ を得る。

エオカキ

x^3 の係数が正であることから、
 $x=-\frac{1}{2}$ のとき、極大値 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$ をとり、
 $x=0$ のとき、極小値 $f(0)=0$ をとる。

(2)
(i) クケコ

倍角、三倍角の公式から、
$$\begin{cases} \cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t \\ \cos 2t=2\cos^2 t-1 \end{cases}$$
 であるので、
 $g(t)=4\cos^3 t+2a\cos^2 t+(b-3)\cos t-a+c$ と書け、
文中より得られる式
 $g(t)=4f(t)-a+c=4\cos^3 t+3\cos^2 t-a+c$ と係数比較して、
 $a=\frac{3}{2},b=3$ を得る。

(ii) サシスセソ

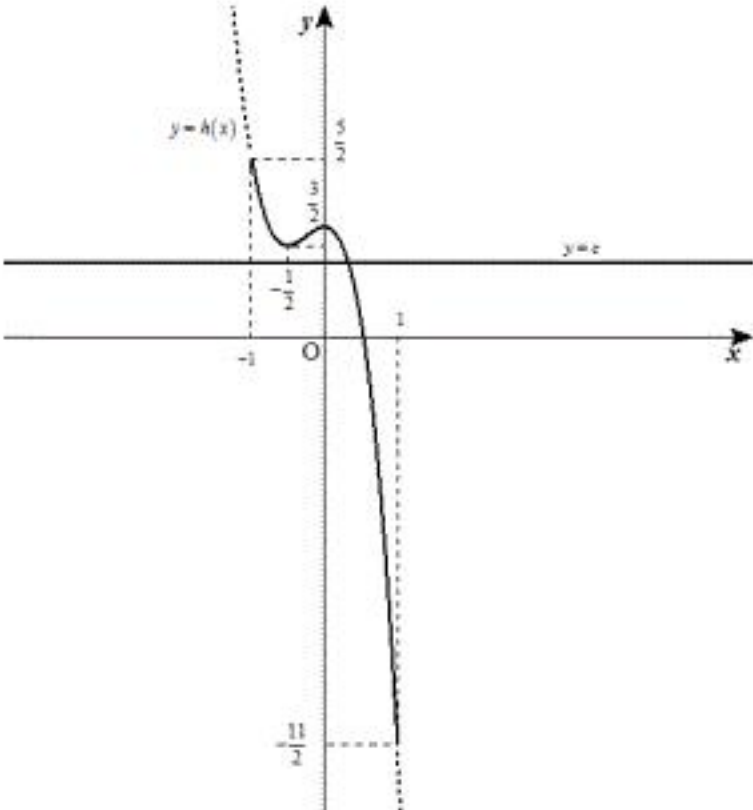
$g(t)=4\cos^3 t+3\cos^2 t-\frac{3}{2}+c=0$ において、 $x=\cos t$ とおき $(-1\leq x\leq 1)$

定数 c を分離して考えると、 $c=-4x^3-3x^2+\frac{3}{2}$ (・・・①) となる。

①式右辺を $h(x)$ とおく。

$h'(x)=-12x^2-6x=-6(2x+1)$ より、 $y=h(x)$ の増減表、ならびに $y=h(x)$ と $y=c$ の
グラフはそれぞれ以下の様になる。

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$h(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$



$y=h(x)$ と $y=c$ が $-1\leq x\leq 1$ で少なくとも一つの交点をもてばよいので、上グラ
フより

$-\frac{11}{2}\leq c\leq \frac{5}{2}$ となればよいことがわかる。

(iii) タチツテ

区間 $0\leq t\leq \pi$ において、前問の x は任意の t に対し一意に定まるように動くため、
 $0\leq t\leq \pi$ において異なる 3 つの実数解を持つことは、
 x が $-1\leq x\leq 1$ で異なる 3 つの実数解を持つことと同値である。
従って前問の結果から、 $y=c$ が $y=h(x)$ と異なる 3 つの交点を持つためには、
 $\frac{5}{4}<c<\frac{3}{2}$ となればよい。

- (1) ア 1 イ 6 ウ 0 エ 3 オ 1 カ 6 キ 6 ク 1
 (2) ケ 5 コ 6 サ 1 シ 0 ス 4 セ 3 ソ 0 タ 1 チ 2

[解説]

(1)

(i) アイウエ

C が y 軸対称であることから、 $\alpha \neq 0$ として、 $x = \alpha$ で距離が最小となるとき、 $x = -\alpha$ でも距離の最小値をとるため、ただ一つの点で距離が最小となる場合 $x = 0$ が必要である。このとき原点との距離の最小値が 3 なので、
 円 $x^2 + y^2 = 3^2 = 9$ と、 C が $x = 0$ のみで接すればよい。

$$x^2 + (ax^2 - 3)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow a^2 x^4 + (1 - 6a)x^2 = 0 \quad \text{で、}$$

$$x^2 \{a^2 x^2 + (1 - 6a)\} = 0 \text{ なので、今 } a^2 > 0 \text{ より、これが } x = 0 \text{ でのみ解をもつために}$$

は、

$$1 - 6a \geq 0 \quad (\text{等号時は、} x = 0 \text{ が解となり成立。}) \text{ ならよく、}$$

$$0 < a \leq \frac{1}{6} \text{ で、このときの点は } (0, -3) \text{ となる。}$$

(ii) オカキク

問(i)で考えたように、原点を中心とする円と接する場合に距離が最小となる。
 4 次方程式の重解を考えるため、距離を最小にする点の数は、 $a > 0$ より 1 つか 2 つしか存在しない。さらに、(i)で求めた a の範囲以外の時には必ず点の数は 2 つになるため、求める範囲は $a > \frac{1}{6}$ となる。

また、このとき、放物線 C に接する原点を中心とする円の半径を k とすると、
 円の方程式は $x^2 + y^2 = k^2$ となる。これと放物線 C の式を連立させて、

$$x^2 + (ax^2 - 3)^2 = k^2 \Leftrightarrow a^2 x^4 + (1 - 6a)x^2 + 9 - k^2 = 0$$

上式を x^2 に関する 2 次方程式と見たときにこれが重解をもてばいいので、

$$a^2 \left(x^2 + \frac{1 - 6a}{2a^2} \right)^2 = 0$$

$$a \neq 0 \text{ より、} x^2 = \frac{6a - 1}{2a^2}$$

$$\text{よって求める } x \text{ 座標は、} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{6a - 1} \text{ となる。}$$

(2) ケコサシスセ

グラフは y 軸対称であるため、 $x > 0$ のみで考え、面積を 2 倍すればよい。
 $x > 0$ での原点からの距離が最小になる C 上の点を α とおく。すなわち、
 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{6a - 1}$ とする。

C と接線は α で接しているので、

$$S_1 = 2 \times \int_0^\alpha a(x - \alpha)^2 dx = \frac{2a}{3} \alpha^3 = \frac{1}{3\sqrt{2a^2}} (6a - 1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{—— ①}$$

$$\text{また、} y = ax^2 - 3 \text{ と } x \text{ 軸の交点は } x = \pm \sqrt{\frac{3}{a}} \text{ より、}$$

$$S_2 = 2 \times \int_0^{\sqrt{\frac{3}{a}}} -(ax^2 - 3) dx = 4\sqrt{\frac{3}{a}} \quad \text{—— ②}$$

以上より、

$$a = 1 \text{ のとき } S_1 = \frac{5}{6}\sqrt{10}, S_2 = 4\sqrt{3} \text{ となる。}$$

(3) ソタチ

問(2)の①、②より、 $S_2 > 0$ を踏まえて実際に計算すれば、

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2a^2}} (6a - 1)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\frac{3}{a}}} = \frac{1}{12\sqrt{6a^2}} (6a - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{72} \left(6 - \frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{となり、今 } a > \frac{1}{6} \text{ より、} 0 < \left(6 - \frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} < 6^{\frac{3}{2}} \text{ より、} 0 < \frac{S_1}{S_2} < \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

4

- (1) ア 4 イ 4 ウ 6 エ 1 オ 0
(2) カ 2 キ 8 ク 3 ケ 1 コ 5
(3) サ 1 シ 2
(4) ス 2 セ 4 ソ 0 タ 4 チ 3 ツ 0 テ 0 ト 3
ナ 6 ニ 2 ヌ 0 ネ 1

[解説]

(1) アイウエオ

$x^2 + \frac{1}{x^2} + a = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + a = (t - a)^2 + a - 2$ と書けるため、 $f_2(t)$ はこの式を展開して、
 $f_2(t) = t^2 - 2at + a^2 + a - 2$ とかけるので、
 $a = 2$ のとき、 $f_2(t) = t^2 - 4t + 4$
 $a = 3$ のとき、 $f_2(t) = t^2 - 6t + 10$ となる。

(2) カキクケコ

$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$ なる恒等式から、
 $f_{n+1}(t) - a = (t - a)\{f_n(t) - a\} - \{f_{n-1}(t) - a\}$ で、 $f_n(0) = c_n$ より、 $t = 0$ を代入して、
 $c_{n+1} - a = -a(c_n - a) - c_{n-1} + a \Leftrightarrow c_{n+1} = -ac_n - c_{n-1} + a^2 + 2a$ で、
 $a = 2$ のとき、 $c_{n+1} = -2c_n - c_{n-1} + 8$
 $a = 3$ のとき、 $c_{n+1} = -3c_n - c_{n-1} + 15$ となる。

(3) サシ

$c_{n+1} = c_n$ のとき、 $c_{n+1} = c_n = \dots = c_2 = c_1$ で、今 c_1 は $f_1(t) = t$ より $c_1 = 0$ ときまる。
また(1)より、 $c_2 = f_2(0) = a^2 + a - 2$
で、 $c_2 = c_1 = 0$ より、 $a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 2) = 0$ で、 $a = 1, -2$ が必要。

1. $a = 1$ のとき
(2)の式から $c_{n+1} = -c_n - c_{n-1} + 3$ なので、 $c_3 = 3$ となり不適。

2. $a = -2$ のとき
問(2)の式から $c_{n+1} = 2c_n - c_{n-1}$ で、これは明らかに任意の n に対し $c_n = 0$ 以外なく、
 $c_{n+1} = c_n = \dots = c_2 = c_1 = 0$ となる。
従って求める a の値は 1 つで、 $a = -2$ のとき $c_n = 0$ となる。

(4)問(2)で求められた漸化式を用いる。

(i) スセソタ

$a = 2$ のとき
 $c_{n+1} = -2c_n - c_{n-1} + 8 \quad (c_1 = 0, c_2 = a^2 + a - 2 = 4)$ より、
 $c_1 = 0, c_2 = 4, c_3 = -2 \cdot 4 + 8 = 0, c_4 = 0 - 4 + 8 = 4$ で
 $c_1 = c_3, c_2 = c_4$ となるため、以下漸化式での計算により帰納的に値が求まる周期 2 の周期数列である、
 $c_n = 0$ (n が奇数のとき)
 $c_n = 4$ (n が偶数のとき) となるため、
 $c_{100} = 4, c_{101} = 0, c_{102} = 4$ となる。

(ii) チツテト

同様に $a = 1$ のとき、 $c_{n+1} = -c_n - c_{n-1} + 3 \quad (c_1 = 0, c_2 = a^2 + a - 2 = 0)$ より、
 $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 3, c_4 = 0, c_5 = 0$ で、 $c_1 = c_4 = 0, c_2 = c_5 = 0$ と隣り合う 2 項が等しいので、以下帰納的に値が求まり、 $c_1 = c_4 = 0, c_2 = c_5 = 0$ より
周期 3 の周期数列であり、
 $c_n = 0$ (n が 3 の倍数でないとき)
 $c_n = 3$ (n が 3 の倍数のとき) となり、
 $c_{100} = c_{101} = 0, c_{102} = 3$ となる。

(iii) ナニヌネ

同様に $a = -1$ のとき、 $c_{n+1} = c_n - c_{n-1} - 1 \quad (c_1 = 0, c_2 = a^2 + a - 2 = -2)$ で、
 $c_1 = 0, c_2 = -2, c_3 = -3, c_4 = -2, c_5 = 0, c_6 = 1, c_7 = 0, c_8 = -2$ となり、
 $c_1 = c_7 = 0, c_2 = c_8 = -2$ と隣り合う 2 項が等しいので、以下帰納的に値が求まり、
 $c_{n+6} = c_n$ より周期は 6 で、
 $c_n = 0$ (n が 6 で割って 1 または 5 余るとき)
 $c_n = -2$ (n が 6 で割って 2 または 4 余るとき)
 $c_n = -3$ (n が 6 で割って 3 余るとき)
 $c_n = 1$ (n が 6 で割りきれるとき)
となることから、
 $c_{100} = c_4 = -2, c_{101} = c_5 = 0, c_{102} = c_6 = 1$ となる。