

1 答

$$(1) \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}} = \frac{19}{25} \quad \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}} = \frac{17}{24} \quad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} = \frac{3}{4}$$

$$(2) -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} = -\frac{1}{2} \quad -\boxed{\text{ス}} = -1 \quad \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} = \frac{3}{2} \quad \frac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} = 7\sqrt{5}$$

$$(3) \boxed{\text{ニ}} = 3 \quad \boxed{\text{ヌ}} = 5 \quad \boxed{\text{ネ}} = 1 \quad \boxed{\text{ノ}} = 9 \quad \boxed{\text{ハ}} = 9 \quad \boxed{\text{ヒフ}} = 12$$

$$\boxed{\text{ヘ}} = 7$$

2 解答

(1) 与えられた等式

$$f(x) = \int_0^x g'(t)f(t)dt - g(x)$$

を x で微分して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)f(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(f(x) - 1) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) 関数 $h(x)$ の導関数を計算して, 0 になることを示せばよい. 計算すると,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -g'(x)e^{-g(x)}(f(x) - 1) + e^{-g(x)}f'(x) \\ &= e^{-g(x)}\{f'(x) - g'(x)(f(x) - 1)\} \end{aligned}$$

ここで, (1) より $f'(x) = g'(x)(f(x) - 1)$ であるから

$$\begin{aligned} &= e^{-g(x)}\{g'(x)(f(x) - 1) - g'(x)(f(x) - 1)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので, $h(x)$ は定数であることが示された. (証明終)

またこのとき, 任意の x に対し, $h(x) = h(0) = e^{-g(0)}(f(0) - 1)$ であり, $g(x), f(x)$ の定義より, $g(0) = 0, f(0) = 0$ であるから, $h(x) = -1$ $\cdots$ 答

よって, $h(x) = e^{-g(x)}(f(x) - 1) = -1$ であるから, これを変形すると,

$$f(x) = 1 - e^{g(x)} \quad \cdots \text{答}$$

を得る.

(3) 微分係数の定義より, $f(0) = 0$ に注意すれば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

である. ここで (1) より $f(0) = g'(0)(f(0) - 1)$ であり, $g'(x) = x + 1$ より $g'(0) = 1$ なので,

$$f'(0) = 1 \cdot (0 - 1) = -1 \quad \cdots \text{答}$$

となる.

(4) (2) の結果を示すべき不等式に代入すると,

$$\begin{aligned} 1 - e^{g(x)} &< -g(x) - \frac{1}{2}\{g(x)\}^2 \\ \Leftrightarrow e^{g(x)} &> 1 + g(x) + \frac{1}{2}\{g(x)\}^2 \end{aligned}$$

となるので, これを示す. $x > 0$ で, $g'(x) = x + 1 > 0$ より $g(x)$ は単調増加. また $g(0) = 0$ であったから, 結局 $x > 0$ において $g(x) > 0$ である. したがって, 上の不等式を示すには,

$$t > 0 \text{ において } e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

を示せばよい.

$p(t) = e^t - (1 + t + \frac{t^2}{2})$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} p'(t) &= e^t - 1 - t \\ p''(t) &= e^t - 1 \end{aligned}$$

であって, $p''(t)$ は $t > 0$ で単調増加かつ $p''(0) = 0$ なので, $t > 0, p''(t) > 0$. つまり $p'(t)$ は $t > 0$ で単調増加であるが, これと $p'(0) = 0$ より $t > 0, p'(t) > 0$ が分かる. したがって, $p(t)$ は $t > 0$ で単調増加. $p(0) = 0$ であるから, 結局 $t > 0$ において $p(t) > 0$, すなわち

$$e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

がわかり, 題意の不等式 $f(x) < -g(x) - \frac{1}{2}\{g(x)\}^2$ は示された. (証明終)

3 解答

(1)

$$\begin{aligned}
 I_n - I_{n+1} &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^{4n-2} - x^{4(n+1)-2}}{1-x^4} dx \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^{4n-2}(1-x^4)}{1-x^4} dx \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{3}} x^{4n-2} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4n-1} x^{4n-1} \right]_0^{1/\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{4n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{4n-1} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{(4n-1)9^n} \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$x = \tan t$ とおくと

$$\begin{aligned}
 \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{1+x}{1-x} \right]_0^{1/\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}) \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

となるので、これらをあわせると、

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2}{1-x^4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} \right) \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

となる.

(3) $\frac{1}{1-x^4}$ は区間 $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ において単調増加であるから、
 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最大値をとり、よって

$$a = \frac{1}{1-(1/\sqrt{3})^4} = \frac{9}{8} \quad \cdots \text{答}$$

である. したがって、 $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ において、

$$1 \cdot x^{4n-2} \leq \frac{x^{4n-2}}{1-x^4} \leq ax^{4n-2}$$

となるから、各辺を $x=0$ から $1/\sqrt{3}$ まで積分し、

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} x^{4n-2} dx \leq I_n \leq a \int_0^{1/\sqrt{3}} x^{4n-2} dx \quad \cdots (*)$$

ところで、(1) の計算結果から $\int_0^{1/\sqrt{3}} x^{4n-2} dx = \frac{\sqrt{3}}{(4n-1)9^n}$ であり、また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{(4n-1)9^n} = 0$ である. よって (*) において、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えることにより、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \quad \cdots \text{答}$$

(4) (1) の結果より、 $\frac{1}{\sqrt{3}}(I_n - I_{n+1}) = \frac{1}{(4n-1)9^n}$ である. したがって、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(4n-1)9^n} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^N (I_n - I_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \{ (I_1 - I_2) + (I_2 - I_3) + \cdots + (I_N - I_{N+1}) \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (I_1 - I_{N+1})
 \end{aligned}$$

となり、さらに (3) の結果を考えれば、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)9^n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(4n-1)9^n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}} (I_1 - I_{N+1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\log(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3} \right) \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$