

1 答

$$(1) \frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}} = \frac{224}{15} \quad \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} = \frac{43}{6}$$

$$(2) \boxed{\text{ケ}} = 2 \quad \boxed{\text{コ}} = 2 \quad \boxed{\text{サ}} = 2 \quad \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} = \frac{1 + \sqrt{33}}{4}$$

$$\frac{\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{チツ}}} = \frac{9 + \sqrt{33}}{52}$$

$$(3) \boxed{\text{テト}} = 21 \quad \boxed{\text{ナニ}} = 30 \quad \boxed{\text{ヌネ}} = 45 \quad \boxed{\text{ノハヒ}} = 252$$

$$(4) \frac{\sqrt{\boxed{\text{フヘ}}} - \boxed{\text{ホ}}}{3} = \frac{\sqrt{15} - 3}{3} \quad \frac{\sqrt{\boxed{\text{マミ}}} - \boxed{\text{ム}}}{3} = \frac{\sqrt{57} - 3}{3}$$

$$\frac{\boxed{\text{メモ}}}{\boxed{\text{ヤ}}} = \frac{10}{3}$$

2 解答

(1)

$$g'(t) = 2tf'(t^2)$$

$$g''(t) = 2f'(t^2) + 4t^2f''(t^2) \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1) の結果を代入すると,

$$\begin{aligned} 12t^3f(t^2) - (2t^4 + 2pt^2 - 1) \cdot 2tf'(t^2) \\ - (2t^2 + 1)t \cdot (2f'(t^2) + 4t^2f''(t^2)) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4t^3\{3f(t^2) - (t^2 + p + 1)f'(t^2) - (2t^2 + 1)f''(t^2)\} = 0$$

となる. これが恒等式として成立しているためには,

$$\{3f(t^2) - (t^2 + p + 1)f'(t^2) - (2t^2 + 1)f''(t^2)\} = 0$$

が必要十分であり, $x = t^2$ で置き換えて, 関係式

$$3f(x) - (x + p + 1)f'(x) - (2x + 1)f''(x) = 0 \quad \cdots \text{答}$$

を得る.

(3) $f(x)$ の最高次の項を ax^n とおく. $f(x)$ は 0 でない整式だから, $a \neq 0$ である. すると, 上の関係式の左辺から, n 次の項を取り出すと,

$$3ax^n - x \cdot nax^{n-1} = (3 - n)ax^n$$

となっている. これが 0 になることから, $n = 3$ が必要である.
(証明終)

(4) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, p = -3, f(-1) = 4$ とする.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b, p = -3$ を (2) の関係式に代入して,

$$\begin{aligned} 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ - (x - 2)(3ax^2 + 2bx + c) - (2x + 1)(6ax + 2b) = 0 \\ \Leftrightarrow (b - 6a)x^2 + (2c - 6a)x + (3d + 2c - 2b) = 0 \\ \Leftrightarrow b = 6a, c = 3a, d = 2a \end{aligned}$$

となる.

したがって, $f(-1) = -a + b - c + d = -a + 6a - 3a + 2a = 4$ となり, $a = 1$.

$$\therefore f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 2 \quad \cdots \text{答}$$

3 解答

- (1) $y = -\frac{1}{x}$ について, $y' = \frac{1}{x^2}$ であり, $Q\left(-t, \frac{1}{t}\right)$ における接線の方程式は,

$$y - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2}(x + t) \Leftrightarrow y = \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}.$$

よって, これと $y = \frac{1}{x}$ との交点の x 座標は, 2 式から y を消去して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2tx - t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -t \pm \sqrt{2t^2} = (-1 \pm \sqrt{2})t \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

問題の図より, S_1 が第 3 象限, S_2 が第 1 象限にあることに注意して,

$$S_1\left(-(\sqrt{2}+1)t, -\frac{\sqrt{2}-1}{t}\right), S_2\left((\sqrt{2}-1)t, \frac{\sqrt{2}+1}{t}\right) \quad \cdots \text{答}$$

- (2) $P\left(t, -\frac{1}{t}\right)$ と (1) の結果から,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS_1} &= \left(-(2+\sqrt{2})t, \frac{2-\sqrt{2}}{t}\right) \\ \overrightarrow{PS_2} &= \left(-(2-\sqrt{2})t, \frac{2+\sqrt{2}}{t}\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2} &= (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})t^2 + \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{t^2} \\ &= 2t^2 + \frac{2}{t^2} \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

- (3)

$$\begin{aligned}\triangle S_1PS_2 &= \frac{1}{2} \left| -(2+\sqrt{2})t \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{t} - \frac{2-\sqrt{2}}{t} \cdot \{-(2-\sqrt{2})t\} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| -(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 \right| \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

となるので, 確かに一定であることが分かる. (証明終)

- (4) 内積の定義より,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{PS_1} \cdot \overrightarrow{PS_2}}{|\overrightarrow{PS_1}| |\overrightarrow{PS_2}|} \\ &= \frac{2t^2 + \frac{2}{t^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})^2 t^2 + \frac{(2-\sqrt{2})^2}{t^2}} \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 t^2 + \frac{(2+\sqrt{2})^2}{t^2}}}\end{aligned}$$

ここで, 相加平均・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2+\sqrt{2})^2 t^2 + \frac{(2-\sqrt{2})^2}{t^2}} \sqrt{(2-\sqrt{2})^2 t^2 + \frac{(2+\sqrt{2})^2}{t^2}} \\ &\leq \frac{\{(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2\} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}{2} \\ &= 6 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\cos \theta \geq \frac{2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}{6 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{3}$$

また, $t = 1$ のとき

$$\cos \theta = \frac{2+2}{\left\{\sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2}\right\}^2} = \frac{1}{3}$$

したがって, $t = 1$ のとき $\cos \theta$ は最小値 $\frac{1}{3}$ をとる.