

1 答

$$(1) \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{1}{2} \quad \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} = \frac{1}{2} \quad \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2}{5} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} = \frac{3}{10} \quad \boxed{\text{ス}}t^2 + \boxed{\text{セ}}t + \boxed{\text{ソ}} = 8t^2 + 2t - 9$$

$$\frac{-\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}} = \frac{-1 + \sqrt{73}}{8}$$

$$(2) \boxed{\text{ト}} = 4 \quad \boxed{\text{ナ}} = 4 \quad \boxed{\text{ニ}} = 4 \quad \boxed{\text{ヌネ}} = 12 \quad \boxed{\text{ノ}} = 9 \quad \boxed{\text{ハ}} = 3$$

$$\frac{-\boxed{\text{ヒ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \boxed{\text{ホ}} = 2 \quad \boxed{\text{マ}} = 1 \quad \boxed{\text{ミ}} = 2$$

$$\boxed{\text{ム}} = 1$$

$$(3) \boxed{\text{メ}} = 2 \quad \boxed{\text{モ}} = 2 \quad \boxed{\text{ヤ}} = 6 \quad \boxed{\text{ユ}} = 2 \quad \boxed{\text{ヨ}} = 2$$

$$\boxed{\text{ラ}}\sqrt{\boxed{\text{リ}}} = 2\sqrt{7}$$

2 解答

- (1) 折ったときの頂点 A の位置を R, Q から BC に下ろした垂線の足を H とする. $BP = 1 - x$ であり, よって $BR = \sqrt{PR^2 - BP^2} = \sqrt{2x - 1}$ となる. したがって, $RH = y - \sqrt{2x - 1}$, また $QH = 1$ なので, $RQ = y$ であることに注意すれば,

$$1^2 + (y - \sqrt{2x - 1})^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \quad \cdots \text{答}$$

さらに,

$$PQ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2x^3}{2x - 1}} \quad \cdots \text{答}$$

- (2) (1) で求めた y を, x について解くことを考える. 両辺とも正であることより

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{x^2}{2x - 1} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2y^2x + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= y^2 \pm y\sqrt{y^2 - 1} \end{aligned}$$

ここで, x は実数であるから, $y \geq 1$ であることが分かり, $x \leq 1$ なので, 結局, $x = y^2 - y\sqrt{y^2 - 1}$ であることが分かる. x が y に関して単調減少であることを示す. 実際,

$$\begin{aligned} x' &= 2y - \sqrt{y^2 - 1} - \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ &= \frac{2y\sqrt{y^2 - 1} - (2y^2 - 1)}{\sqrt{y^2 - 1}} \end{aligned}$$

ここで, 分子について $(2y\sqrt{y^2 - 1})^2 = 4y^4 - 4y^2 < 4y^4 - 4y^2 + 1 = (2y^2 - 1)^2$ なので導関数は負である. 以上より, x は y が一番大きい, すなわち $y = a$ のときに最小値をとるので,

$$b = a^2 - a\sqrt{a^2 - 1} \quad \cdots \text{答}$$

- (3) PQ が最小となる状況を考える. $PQ > 0$ であるから, PQ^2 について調べてよい. そこで

$$f(x) = PQ^2 = \frac{2x^3}{2x - 1}$$

と置き, この増減を調べる.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x^2(2x - 1) - 2x^3 \cdot 2}{(2x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2(4x - 3)}{(2x - 1)^2} \end{aligned}$$

であるから, $\frac{3}{4}$ と b の大小により, 次の 2 通りが考えられる.

- (i) $b \geq \frac{3}{4}$ のとき, $a > 1$ という条件の下で,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} = b &\Leftrightarrow 4a^2 - 3 = 4a\sqrt{a^2 - 1} \\ \Leftrightarrow (4a^2 - 3)^2 &= (4a\sqrt{a^2 - 1})^2 \\ \Leftrightarrow 16a^4 - 24a^2 + 9 &= 16a^2(a^2 - 1) \\ \Leftrightarrow 8a^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから, $b \geq \frac{3}{4}$ とはすなわち $1 < a \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ということである. このとき, $b \leq x \leq 1$ において, $f(x)$ は単調増加だから, $x = b$ で最小である. このとき, b を求めた計算から分かるように, $y = a$ であるから, 求めるべき条件に適さない.

- (ii) $b < \frac{3}{4}$ のとき. この条件は, 上の計算から, $a > \frac{3\sqrt{2}}{4}$ と同値であって, このときは, $x = \frac{3}{4}$ で最小であって,

$$y = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2 \cdot \frac{3}{4} - 1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となるから, $y < a$ であり, 条件を満たす.

以上より, 求める a の範囲は $a > \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\cdots$ 答

3 解答

(1)

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x}(a \sin x + b \cos x) + e^{-x}(a \cos x - b \sin x) \\ &= -(a+b)e^{-x} \sin x + (a-b)e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

となるから, $a+b=-1, a-b=0$ と定めればよく, $a=b=-\frac{1}{2}$

…答

(2)

$$A_{k+1} = \left| \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-x} \sin x dx \right|$$

ここで $x=t+\pi$ と置換すると, $dx=dt$ であって,

$$= \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-(t+\pi)} \sin(t+\pi) dt \right|$$

$\sin(t+\pi) = -\sin t$ より

$$\begin{aligned} &= |-e^{-\pi}| \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin t dt \right| \\ &= e^{-\pi} A_k \quad \text{…答} \end{aligned}$$

(3) (2) よりこの級数の公比は $e^{-\pi}$ である. また初項 A_0 について, (1) を用いると,

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[e^{-x} \left(-\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) \right]_0^{\pi} \\ &= \left\{ e^{-\pi} \left(0 - \frac{1}{2} \cdot (-1) \right) - e^0 \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1+e^{-\pi}}{2} \end{aligned}$$

となるので, 無限等比級数の和公式より,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} \quad \text{…答}$$

(4) 区間 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ において $f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の x 軸周りの回転体の体積を D_k とおく.

$$D_k = \pi \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (e^{-x} \sin x)^2 dx$$

である. また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$$

である. (2) のようにして, D_{k+1} と D_k の関係を求めると,

$$D_{k+1} = \pi \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} e^{-2x} \sin^2 x dx$$

先と同様に $x=t+\pi$ と置換すれば,

$$\begin{aligned} &= \pi \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2(t+\pi)} \sin^2(t+\pi) dt \\ &= e^{-2\pi} \cdot \pi \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t} \sin^2 t dt \\ &= e^{-2\pi} D_k \end{aligned}$$

であるから, 考えるべき級数は公比 $e^{-2\pi}$ の等比級数. また, 初項は

$$\begin{aligned} D_0 &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} e^{-2x} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{-2x} dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos 2x dx \end{aligned}$$

ここで, $\left\{ e^{-2x} \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \right\}' = e^{-2x} \cos 2x$ であることより,

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{2} \left[e^{-2x} \left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2\pi}) - \frac{\pi}{8} (1 - e^{-2\pi}) \\ &= \frac{\pi}{8} (1 - e^{-\pi}) \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-2\pi}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{\pi}{8} \quad \text{…答}$$