

(1)

e^x は x について単調増加なので,

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^2 |e^a - e^x| x dx \\ &= \int_0^a (e^a - e^x) \cdot x dx + \int_a^2 (e^x - e^a) \cdot x dx \end{aligned}$$

となり, ここで部分積分を用いて,

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{2} e^a x^2 - x e^x \right]_0^a + \int_0^a e^x dx + \left[-\frac{1}{2} e^a x^2 + x e^x \right]_a^2 - \int_a^2 e^x dx \\ &= e^a a^2 - 2a e^a + e^2 - 1 \end{aligned}$$

となることがわかる。

以上より, $f(a) = e^a a^2 - 2a e^a + e^2 - 1$ となる。

$$(\text{答}) \quad f(a) = e^a a^2 - 2a e^a + e^2 - 1$$

(2)

$f(a)$ の両辺を a で微分すると,

$$f'(a) = e^a a^2 + 2e^a a - 2e^a - 2a e^a = e^a (a^2 - 2) \text{ であり, 増減表は次のようになる。}$$

a	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(a)$	-	-	0	+	+
$f(a)$	$e^2 - 1$	$\searrow$	$2e^{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2}) + e^2 - 1$	$\nearrow$	$e^2 - 1$

したがって,

$$\text{最小値は } 2e^{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2}) + e^2 - 1 \quad (a = \sqrt{2})$$

$$\text{最大値は } e^2 - 1 \quad (a = 0, 2) \quad \text{となる。}$$

$$(\text{答}) \text{ 最小値は } 2e^{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2}) + e^2 - 1 \quad (a = \sqrt{2} \text{ のとき})$$

$$\text{最大値は } e^2 - 1 \quad (a = 0, 2 \text{ のとき})$$

(1)

$P(p, p^2)$ における接線の傾きは $2p$ である。

したがって、法線の式は C を定数として、 $x + 2py = C$ と表せる。

これが (p, p^2) を通るので、法線の式は $x + 2py = p + 2p^3$ となる。

同様に、 $Q(q, q^2)$ における法線の式は、 $x + 2qy = q + 2q^3$ となる。

これら 2 直線の交点を考える。辺々引くと、

$$2(p - q)y = (p - q) + 2(p^3 - q^3)$$

$$y = \frac{1}{2} + p^2 + q^2 + pq \quad (\because p \neq q) \text{ となる。}$$

したがって、これを直線の式に代入して x について解くと、

$$\begin{aligned} x &= p + 2p^3 - 2p \left(\frac{1}{2} + p^2 + q^2 + pq \right) \\ &= -2pq(p + q) \end{aligned}$$

である。したがって、 R の座標は $\left(-2pq(p + q), p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{2} \right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad R \left(-2pq(p + q), (p + q)^2 - pq + \frac{1}{2} \right)$$

(2)

$y = -2x + a$ と $y = x^2$ の交点の x 座標は、 $-2x + a = x^2$ の解である。

$x^2 + 2x - a = 0$ なる方程式が相異なる 2 実解をもつ条件は、

この方程式の判別式を D として、 $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot (-a) = 1 + a > 0$

よって、求める a の値の範囲は $a > -1$

(答) $a > -1$

(3)

P, Q を通る直線の方程式は、 $p \neq q$ のとき

$$y = \frac{p^2 - q^2}{p - q}(x - p) + p^2 = (p + q)x - pq \text{ である。}$$

したがって、 $y = (p + q)x - pq = -2x + a$ なので、 $p + q = -2$, $pq = -a$ となる。

(1) の答に代入すると、 $R \left(-4a, a + \frac{9}{2} \right)$ となる。 $R(X, Y)$ とおくと、

$$Y = -\frac{1}{4}X + \frac{9}{2} \text{ が成り立ち、定義域は } X = -4a < 4 \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad \text{直線 } y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \quad (x < 4)$$

(1)

$0 < k < n$ のとき, [A]で終了する場合のみを考えればよい。

1回目の試行で終了するには m のカードを引けばよいので, $p_1 = \frac{1}{m}$

$1 < i < n$ として, $i-1$ 枚目までの和が m の倍数にならなかった場合,
 $i-1$ 枚目までの和を m で割った余りを l とすると, $1 \leq m-l \leq m$ より,
 i 枚目までの和を m の倍数にするカードは, いつでも1枚のみ存在する。
したがって, k 回目 ($1 < k < n$) の試行で終了するカードの引き方は

1枚目は $m-1$ 通り。

2枚目は $m-1$ 通り。

⋮

$k-1$ 枚目は $m-1$ 通り。

k 枚目は1通り。

となる。

以上から, $1 < k < n$ のとき $p_k = \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{k-1}$ となることが分かり,

これは $k=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad p_k = \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{k-1} \quad (0 < k < n)$$

(2)

余事象の確率を1から引けばよいので,

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1}}{1 - \frac{m-1}{m}} \\ &= \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k p_k &= \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{m-1}{m} \right)^{k-1} + n \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となり, ここで $s = n-1, r = \frac{m-1}{m}$ として公式を用いると,

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - n \left(1 - \frac{1}{m} \right)^{n-1} + (n-1) \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n}{\frac{1}{m}} + n \left(\frac{m-1}{m} \right)^{n-1} \\ &= m \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n k p_k = m \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right\}$$