

1

(1) ア 3 イ 3 ウ 4 エ 7 オ 1 カ 2 キ 3

(2) ク 6 ケ 2 コ 5 サ 2

(1)

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a-6b & -6a+10b \\ 10c-6d & -6c+10d \end{pmatrix} \text{ と}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a-6c & 10b-6d \\ -6a+10c & -6b+10d \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$XA = AX \Leftrightarrow \begin{cases} 10a-6b=10a-6c \\ -6a+10b=10b-6d \\ 10c-6d=-6a+10c \\ -6c+10d=-6b+10d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \text{ となることがわかる。}$$

したがって、求める条件は

$$(\text{答}) \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

(2)

$$X^2 = A \text{ の両辺に右から } X \text{ をかけると, } X^3 = AX$$

$$X^2 = A \text{ の両辺に左から } X \text{ をかけると, } X^3 = XA$$

したがって、 $X^3 = XA = AX$ となるため、 $XA = AX$ となることが示された。

(証明終)

(3)

(1),(2)より、 $X^2 = A$ のとき $XA = AX$ となり、 $XA = AX \Leftrightarrow a=d$ かつ $b=c$ なので、

$X^2 = A$ を満たすには、 $a=d$ かつ $b=c$ が必要。このとき、

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ 2ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=10 \\ ab=-3 \end{cases} \text{ となり, } \begin{cases} a^2+b^2=10 \\ a^2b^2=9 \end{cases} \text{ となる。}$$

解と係数の関係から、 a^2, b^2 は 方程式 $t^2 - 10t + 9 = 0$ の 2 解である。

これを解くと $t=1, 9$ なので $a^2=1, b^2=9$ または $a^2=9, b^2=1$

このうち、 $ab=-3$ を満たす a, b は

$a=\pm 1, b=\mp 3$ または $a=\mp 3, b=\pm 1$ (複号同順)

したがって、 $X^2 = A$ を満たす X は、

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} \pm 1 & \mp 3 \\ \mp 3 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 3 & \mp 1 \\ \mp 1 & \pm 3 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

(1)

$$S_1 = a_1 = \frac{(3+2)a_1 + 3}{6} \text{ であり, これを解くと, } a_1 = 3$$

(答) $a_1 = 3$

(2)

 $n \geq 2$ において, $S_n - S_{n-1} = a_n$ となることから,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(3+2n)a_n + 3}{6} - \frac{(3+2n-2)a_{n-1} + 3}{6}$$

この式を整理して,

$$(2n-3)a_n = (2n+1)a_{n-1} \text{ なる式が得られる。}$$

(答) $(2n-3)a_n = (2n+1)a_{n-1}$

(3)

 $n \geq 2$ において, $2n-3 > 0$ であるので, (2)で得られた式を用いて,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2n-3} a_{n-1} = \frac{(2n+1)}{(2n-3)} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n-5)} \cdots \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{1} \cdot a_1 \\ &= \frac{(2n+1)(2n-1)}{3} \cdot a_1 \\ &= 4n^2 - 1 \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つので, $a_n = 4n^2 - 1$ ($n \geq 1$)(答) $a_n = 4n^2 - 1$