

E 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入
しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は、解答用紙に記入せよ。

1 半径 r の円の面積と、半径 r の球の体積についての次の問に答えよ。

(20 点)

(1) 半径 r の円の面積を求める式

$$2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2$$

によって表される数学的な内容を、左辺の積分の式の立て方の図形的意味を中心に正確な日本語で述べよ。また、この積分を計算して右辺の値が得られることを答を導く過程とともに示せ。

(2) 半径 r の球の体積を求める式

$$\pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3} \pi r^3$$

によって表される数学的な内容を、左辺の積分の式の立て方の図形的意味を中心に正確な日本語で述べよ。また、この積分を計算して右辺の値が得られることを答を導く過程とともに示せ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は、解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 10円硬貨、5円硬貨、1円硬貨の3枚を同時に投げ、10円硬貨の表が出たら $s = 1$ とおき、裏が出たら $s = 0$ とおく。また、5円硬貨の表が出たら $t = 1$ とおき、裏が出たら $t = 0$ とおく。1円硬貨についても表が出たら $u = 1$ とおき、裏が出たら $u = 0$ とおく。さらに、数列 $\{a_n\}$ について次の条件

(H) どの自然数 n についても a_n の値は0または1である

を定める。例えば、数列

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0, a_6 = 1, \dots$$

は、条件 (H) を満たしている。

(40 点)

(1) 条件 (H) を満たすすべての数列 $\{a_n\}$ について次の不等式

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{4} + \frac{u}{8} + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{4}$$

が成り立つ確率を求めよ。

(2) 条件 (H) を満たすある数列 $\{a_n\}$ を選ぶことによって次の等式

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{4} + \frac{u}{8} + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{1}{3}$$

が満たされる確率を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は、解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 $f(x)$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で微分可能な偶関数で、その導関数 $f'(x)$ も同じ区間で連続であるとする。また区間の端点では条件 $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ が満たされているものとする。以下で、上で述べたようなすべての関数 $f(x)$ に対して不等式

$$(*) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)\}^2 dx$$

が成立することを示す。 (40 点)

(1) $(*)$ の証明にとりかかる前に区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 全体では不等式

$$\{f(x)\}^2 \leq \{f'(x)\}^2$$

が成立するとは限らないことを確かめておこう。

$$f(x) = (x + \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2} - x) \text{ のとき}$$

$$\{f(x_1)\}^2 < \{f'(x_1)\}^2, \quad \{f(x_2)\}^2 > \{f'(x_2)\}^2$$

が成立する点 x_1, x_2 の例をあげよ。

(2) $|x| < \frac{\pi}{2}$ とし、最初に述べたような一般の関数 $f(x)$ に対して

$$g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}, \quad h(x) = g'(x) \cos x$$

とおく。

(a) $h(x) = f'(x) + g(x) \sin x$ が成立することを示せ。

(b) 微分係数の定義に基づき、次の極限值

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(\frac{\pi}{2} - x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(\frac{\pi}{2} - x)}{x}$$

が定まることを示せ。この極限値を a とおくと

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x - \frac{\pi}{2}) = a$$

が成立することを示せ。

(c) $f'(-x) + f'(x) = 0$ を示してから

$$\lim_{x \rightarrow +0} h\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \lim_{x \rightarrow +0} h\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

を求めよ。

(3) まず $|x| < \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $g(x)$, $h(x)$ の $x = \pm \frac{\pi}{2}$ での値については (2) の (b) で求めた極限值 a により

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a$$

と定め、(2) の (c) で求めた極限值により

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +0} h\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +0} h\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

と定める。これにより 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 全体で連続であるといえる。すなわち、この区間上の連続関数 $f(x)$, $f'(x)$ を $g(x)$, $h(x)$ と 3 角関数を使って表した等式

$$f(x) = g(x) \cos x, \quad f'(x) = h(x) - g(x) \sin x$$

は、この区間全体で成立する。従って、ある微分可能な関数 $G(x)$ の導関数 $G'(x)$ を用いて

$$\{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 = \{h(x)\}^2 - \frac{1}{2}G'(x)$$

と書き表せる。左辺の $\{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2$ を計算することにより、 $G(x)$ を $g(x)$ と 3 角関数を使って表せ。ただし、 $G(0) = 0$ とする。

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{f'(x)\}^2 - \{f(x)\}^2] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{h(x)\}^2 dx$$

を示せ。これから不等式 (*) が導けることを説明せよ。