

F 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のアからヒにあてはまる 0 から 9 までの整数を求め、その数字を解答用マークシートの所定欄にマークせよ。また、 内の (あ) から (く) には、解答群の中からあてはまるものを選び、その番号を解答用マークシートの所定欄にマークせよ。必要なら、同一番号を繰り返し用いてよい。ただし、問題文中に ア などが 2 度以上現れる場合、2 度目以降は、ア のように細字で表記する。

分数は既約分数 (それ以上約分できない分数) とする。また、根号を含む解答では、根号の中に現れる自然数が最小となる形で表すものとする。 (30 点)

(1) a を実数の定数、 t を実数とし、 x の 2 次関数 $f(x) = (x+a)^2 + t^2x + t^4$ の最小値を $g(t)$ とすると、 $g(t) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} t^4 - at^2$ である。

t が実数の範囲を動くとする。 $g(t)$ は $a > \text{ウ}$ のとき $t = \pm \frac{\sqrt{\text{エ}} a}{\text{オ}}$ で最小値 $-\frac{\text{カ}}{\text{キ}} a^2$ をとり、 $a \leq \text{ウ}$ のとき $t = \text{ク}$ で最小値 ケ をとる。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) O を原点とする xy 平面上に、点 $P(a, b)$ をとる。ただし、

$$a = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}, \quad b = 1$$

とする。また、点 Q の座標 (c, d) は

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{5}{12}\pi & -\sin \frac{5}{12}\pi \\ \sin \frac{5}{12}\pi & \cos \frac{5}{12}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。

$$\sin \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}(\boxed{\text{サ}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}})}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また、三角形 OPQ の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{セ}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}} < \boxed{\text{チ}}$ とする。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} q & r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たしているとする。ただし、 $\alpha > \beta$ とする。

(a) q, r を α, β を用いて表すと、 $q = \boxed{\text{あ}}$ 、 $r = \boxed{\text{い}}$ となる。

α と β は 2 次方程式 $x^2 - \boxed{\text{て}}x - \boxed{\text{ト}} = 0$ の 2 つの解で、

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ナ}} + \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}, \quad \beta = \frac{\boxed{\text{ナ}} - \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \quad \text{である。}$$

A^n (n は自然数) を α, β, n を用いて表すと、次のようになる。

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}} \begin{pmatrix} \boxed{\text{う}} & \boxed{\text{え}} \\ \boxed{\text{お}} & \boxed{\text{か}} \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項 a_n, b_n を α, β, n を用いて表すと

$$a_n = \frac{\boxed{\text{き}}}{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}, \quad b_n = \frac{\boxed{\text{く}}}{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}$$

となる。

さらに、
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}} - \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \quad \text{である。}$$

(あ), (い), (う), (え), (お), (か), (き), (く) の解答群

0 $\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}$ 1 $\alpha^n - \beta^n$ 2 $\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}$ 3 $\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}$

4 $\alpha - 1$ 5 $\beta - 1$ 6 α 7 β

8 $\alpha + 1$ 9 $\beta + 1$

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 xy 平面において、放物線 $C: y = x^2$ 上に 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし, $a < 0 < b$ とする。点 A, B における C の接線をそれぞれ ℓ, m とし, それらの交点を $P(p, q)$ とする。次の問いに答えよ。 (30 点)

- (1) p, q を a, b を用いて表せ。
- (2) 点 P を通り, x 軸に垂直な直線と, 直線 AB との交点を $Q(p, r)$ とする。
 r と線分 PQ の長さを a, b を用いて表せ。
- (3) 三角形 APB の面積を S とする。 S を a, b を用いて表せ。
- (4) 点 B に対して, 点 A を直線 AB が m と直交するようにとる。 ℓ と m のなす角を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき, a と $\tan \theta$ を b を用いて表せ。
- (5) (4) の条件のもとで点 B を動かしたとき, 三角形 APB の面積 S の最小値とそのときの b の値を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 e を自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

(40 点)

- (1) 与えられた実数の定数 a, b, c, p ($p \neq 0$) に対して、次の等式を満たす連続関数 $g(x)$ と定数 k を求めよ。

$$\int_0^x g(t)dt = (ax^2 + bx + c)e^{-\frac{x}{p}} + k$$

- (2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = (3x - x^2)e^{-\frac{x}{2}}$ により定める。

- (a) $y = f(x)$ のグラフの変曲点は 2 つあるので、その x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 α, β およびその値に最も近い整数値をそれぞれ求めよ。

また、 $y = f(x)$ の増減、グラフの凹凸を調べ、1 つの表にまとめよ。 $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。

- (b) $x \geq 0$ の範囲で常に $|f(x)| \leq n$ となるような最小の自然数 n を求めよ。
必要ならば、 $e^3 > 20$ を用いてもよい。

- (c) 曲線 $y = f(x)$ の $y \geq 0$ にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。(ヒント: (1) の結果を利用するとよい。)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。