

K 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用マークシートに受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中に入る数は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。

1 関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = 3^x$ とする。

(1) (i) $f(a+1) = f(a) + 1$ を満たす a の値は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(ii) $f(2a) > 2f(a)$ を満たす a の値の範囲は $\text{ウ} < a < \text{エ}$ である。

(iii) $f(a^2) > \{f(a)\}^2$ を満たす a の値の範囲は $\text{オ} < a < \text{カ}$ である。

(2) (i) $g(b+1) = g(b) + 1$ を満たす b の値は $-f(\text{キ})$ となる。

(ii) $g(4b) < 4g(b)$ を満たす b の値の範囲は $b < \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} f(2)$ となる。

(iii) $g(2b) \geq k g(b) - k - 3$ がすべての実数 b に対して成り立つような実数 k の値の範囲は $-\text{コ} \leq k \leq \text{サ}$ である。

(25 点)

右のページは白紙です。

2 関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ (ただし p, q は定数) は, $x = -\frac{1}{2}$ と $x = 0$ で極値をとるといふ。

(1) (i) $p = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $q = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(ii) $f(x)$ の極大値は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}$, 極小値は $\boxed{\text{キ}}$ である。

そのとき, さらに関数 $g(t) = \cos 3t + a \cos 2t + b \cos t + c$ (ただし a, b, c は定数) があって, 等式 $g(t) = 4f(\cos t) - a + c$ が成り立つという。

(2) (i) $a = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$ である。

(ii) 方程式 $g(t) = 0$ が, 少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 c の値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \leq c \leq \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(iii) 方程式 $g(t) = 0$ が, 区間 $0 \leq t \leq \pi$ に異なる 3 つの実数解をもつような定数 c の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} < c < \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

3

xy 平面上に放物線 $C: y = ax^2 - 3$ がある。ただし、 a は正の定数である。 C 上の点で、原点からの距離が最小になるような点を考える。

- (1) (i) そのような点がただ1つ存在するためには、 $0 < a \leq \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ であることが必要十分であり、そのとき、そのような点の座標は $(\text{ウ}, -\text{エ})$ となる。

- (ii) そのような点がちょうど2つ存在するためには、

$$a > \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \dots\dots\dots (*)$$

であることが必要十分であり、そのとき、そのような点の x 座標は

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\text{キ}a - \text{ク}}$$

となる。

定数 a が $(*)$ の範囲にあるとき、原点からの距離が最小になるような C 上の2つの点における C の接線を ℓ_1, ℓ_2 とする。 C と ℓ_1, ℓ_2 とで囲まれた部分の面積を S_1 とおく。また、 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく。

- (2) 例えば $a = 1$ のとき、

$$S_1 = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \sqrt{\text{サシ}}, \quad S_2 = \text{ス} \sqrt{\text{セ}}$$

である。

- (3) a が $(*)$ の範囲を動くとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ が取りうる値の範囲は

$$\text{ソ} < \frac{S_1}{S_2} < \frac{\text{タ}}{\text{チ}}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4 $x + \frac{1}{x} + a = t$ とおくとき、任意の自然数 n に対して、 x の式 $x^n + \frac{1}{x^n} + a$ は t の多項式として表される。この多項式を $f_n(t)$ とおく。ただし、 a は定数である。また、多項式 $f_n(t)$ の定数項を c_n とおく。

(1) $f_2(t)$ は t の 2 次式であり、例えば

$$a = 2 \text{ のときは } f_2(t) = t^2 - \boxed{\text{ア}} t + \boxed{\text{イ}},$$

$$a = 3 \text{ のときは } f_2(t) = t^2 - \boxed{\text{ウ}} t + \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}$$

となる。

(2) $n \geq 2$ に対して、 c_{n+1} を、 c_n と c_{n-1} を用いて表すと、例えば

$$a = 2 \text{ のときは } c_{n+1} = -\boxed{\text{カ}} c_n - c_{n-1} + \boxed{\text{キ}},$$

$$a = 3 \text{ のときは } c_{n+1} = -\boxed{\text{ク}} c_n - c_{n-1} + \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}$$

となる。

(3) $c_{n+1} = c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となるような a の値は $\boxed{\text{サ}}$ 個ある。

$a = -\boxed{\text{シ}}$ のとき、 $c_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となる。

数列 $\{c_n\}$ が、ある自然数 d に対して $c_{n+d} = c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、 $\{c_n\}$ は周期数列であるといい、そのような d の最小の数を周期とよぶことにする。

(4) (i) $a = 2$ のとき、 $\{c_n\}$ は周期が $\boxed{\text{ス}}$ の周期数列であり、例えば

$$c_{100} = \boxed{\text{セ}}, \quad c_{101} = \boxed{\text{ソ}}, \quad c_{102} = \boxed{\text{タ}}$$

となる。

(ii) $a = 1$ のとき、 $\{c_n\}$ は周期が $\boxed{\text{チ}}$ の周期数列であり、例えば

$$c_{100} = \boxed{\text{ツ}}, \quad c_{101} = \boxed{\text{テ}}, \quad c_{102} = \boxed{\text{ト}}$$

となる。

(iii) $a = -1$ のとき、 $\{c_n\}$ は周期が $\boxed{\text{ナ}}$ の周期数列であり、例えば

$$c_{100} = -\boxed{\text{ニ}}, \quad c_{101} = \boxed{\text{ヌ}}, \quad c_{102} = \boxed{\text{ネ}}$$

となる。

(25 点)

右のページは白紙です。