

P 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H B または B)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から へ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 自然数 n に対して、0 以上 n 以下の整数の中から同じ数をとることも許して 2 つの数を無作為に選んだとき、2 つの数の差の絶対値が $\frac{n}{2}$ 以下となる確率を

p_n とする。このとき、 $p_4 = \frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$ であり、 $p_{11} = \frac{\text{オカ}}{\text{キク}}$ となる。さらに、

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ である。

(2) xyz 空間内に 2 点 $A(2, -3, 1)$, $B(-3, 1, 2)$ がある。

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 70$$

を満たす点 $P(x, y, z)$ の軌跡は、

$$\text{中心} \left(-\frac{\text{サ}}{\text{シ}}, -\text{ス}, \frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \right), \quad \text{半径} \frac{\text{タ} \sqrt{\text{チ}}}{2}$$

の球面である。さらに点 P が

$$|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2 = \frac{1}{3} |\overrightarrow{AB}|^2$$

を満たすとき、 $\cos \angle APB = \frac{\sqrt{\text{ツ}}}{\text{テ}}$ であり、 $\triangle APB$ の面積は $\text{ト} \sqrt{\text{ナ}}$ となる。

右のページは白紙です。

(3) 自然数 n に対して, a_n, b_n をそれぞれ

$$a_n = 9^{n-1}, \quad b_n = 7^{n-1}$$

で定める。このとき, a_n を 10 で割った余りが a_1 と等しくなるような, 1 より大きな自然数で最小の n は である。同様に, b_n を 10 で割った余りが b_1 と等しくなるような, 1 より大きな自然数で最小の n は である。

また, a_{21} を 10 で割った余りは であり, b_{31} を 10 で割った余りは である。したがって, $a_{21}b_{31}$ を 10 で割った余りは となる。

さらに, 不等式

$$a_nb_n < 10^{20}$$

を満たす最大の自然数 n は である。このときの a_nb_n を 10 で割った余りは である。ただし,

$$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478, \quad 0.845 < \log_{10} 7 < 0.846$$

という関係を用いてもよい。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙 2 に記入しなさい。

2 2 次関数 $g(x) = \frac{x^2}{2} + x$ に対して、微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_0^x g'(t)f(t) dt - g(x)$$

を満たしているものとする。ただし、 $g'(x)$ は $g(x)$ の導関数である。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、 $f(x)$ と $g'(x)$ を用いて表しなさい。

(2) 関数

$$h(x) = e^{-g(x)}(f(x) - 1)$$

は定数となることを示しなさい。また、その値を求め、これより、 $f(x)$ を $g(x)$ を用いて表しなさい。

(3) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めなさい。

(4) 正の実数 x に対して、不等式

$$f(x) < -g(x) - \frac{1}{2}\{g(x)\}^2$$

が成り立つことを示しなさい。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙 **3** に記入しなさい。

3 自然数 n に対して, I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^{4n-2}}{1-x^4} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えなさい。

(1) 自然数 n に対して $I_n - I_{n+1}$ を求めなさい。

(2) 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

を $x = \tan t$ とおいて求めなさい。次に 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-x^2} dx$$

を求め, これらから I_1 を求めなさい。

(3) $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 x に対して,

$$1 \leq \frac{1}{1-x^4} \leq a$$

となる最小の数 a を求め, この不等式を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めなさい。

(4) これらの結果を用いて, 次の無限級数の和を求めなさい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)9^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(4n-1)9^n}$$

(30 点)

右のページは白紙です。