

Q 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ヤ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、ケ などは既出の ケ を表す。

(40 点)

(1) xy 平面において、 x 軸、直線 $y = x + 2$ 、さらに放物線 $y = x^2$ の右半分 ($x \geq 0$ の範囲にある放物線の部分) の 3 つで囲まれた図形を、 x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は

$$\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} & \text{ウ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{エ} & \text{オ} \\ \hline \end{array}} \pi$$

であり、 y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は

$$\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{カ} & \text{キ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ク} \\ \hline \end{array}} \pi$$

である。

右のページは白紙です。

(2) a を正の定数とする。 $t > 1$ に対し、関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \int_1^t \frac{a + 2 - (a^2 + 6a + 11) \log x}{x} dx$$

と定める。ただし、対数は自然対数を表す。このとき $f(t)$ は

$$\log t = \frac{a + \boxed{\text{ケ}}}{a^2 + 6a + 11}$$

を満たす t で最大値

$$\frac{1}{\boxed{\text{コ}}} \frac{(a + \boxed{\text{ケ}})^{\boxed{\text{サ}}}}{a^2 + 6a + 11}$$

をとる。また、 $f(t)$ が $\log t = \frac{2}{13}$ を満たす t で最大値をとるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

のときであり、その最大値は

$$\frac{\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

- (3) $(a+b+c)^5$ を展開して整理したとき、項の数は

テ	ト
---	---

 で、 a^2b^2c の係数は

ナ	ニ
---	---

 である。また $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^5$ を展開して整理したときの x^3 の係数は

ヌ	ネ
---	---

 で、定数項は

ノ	ハ	ヒ
---	---	---

 である。

- (4) a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とし、 A, E, O を次の 2×2 行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\cos \frac{a^2}{2\pi} \\ \sin a & \sin \frac{a^2}{2\pi} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ある実数 b に対して $A^2 + bA + \frac{\sqrt{3}}{2}E = O$ を満たすような a は全部で 4 個ある。
 これらを小さい方から順に a_1, a_2, a_3, a_4 とすると、

$$a_1 = \frac{\sqrt{\text{フ} \text{ヘ}} - \text{ホ}}{3} \pi, \quad a_4 = \frac{\sqrt{\text{マ} \text{ミ}} - \text{ム}}{3} \pi$$

$$(a_3 - a_2)(a_3 + a_2 + 2\pi) = \frac{\text{メ} \text{モ}}{\text{ヤ}} \pi^2$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙 2 に記入しなさい。

2 次の条件を満たす x の整式 $f(x)$ を考える。

$f(x)$ に $x = t^2$ を代入して得られる t の整式

$$g(t) = f(t^2)$$

はある定数 p に対し、次の関係式 (*) を満たす。

$$12t^3g(t) - (2t^4 + 2pt^2 - 1)g'(t) - (2t^2 + 1)tg''(t) = 0 \quad (*)$$

ただし、 $g'(t)$, $g''(t)$ はそれぞれ $g(t)$ の第 1 次, 第 2 次導関数を表す。

(1) $g'(t)$ を $f'(t^2)$, $g''(t)$ を $f'(t^2)$ と $f''(t^2)$ を用いて表しなさい。ただし、 $f'(t^2)$, $f''(t^2)$ はそれぞれ $f(x)$ の第 1 次, 第 2 次導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ に $x = t^2$ を代入した関数である。

(2) (1) を用いて、関係式 (*) を $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ の関係式に書き直しなさい。

(3) $f(x)$ を 0 でない整式とすると $f(x)$ の次数は、 p の値によらず、3 となることを示しなさい。

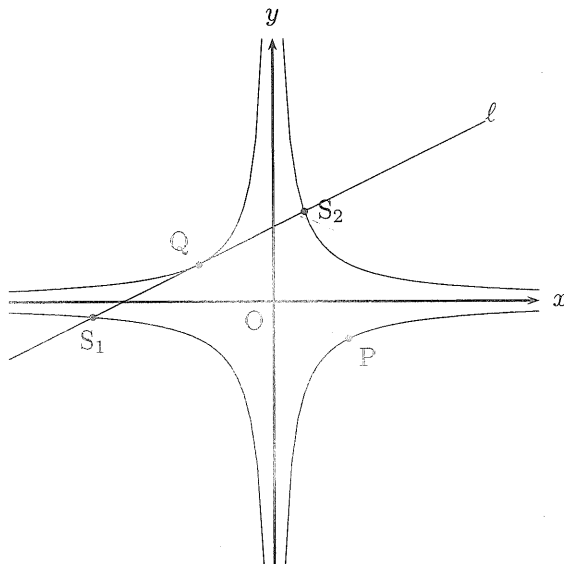
(4) $p = -3$ かつ $f(-1) = 4$ のとき、整式 $f(x)$ を求めなさい。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙 **3** に記入しなさい。

- 3** $t > 0$ に対して, xy 平面の曲線 $y = -\frac{1}{x}$ 上の 2 点 $P\left(t, -\frac{1}{t}\right)$, $Q\left(-t, \frac{1}{t}\right)$ をとる。点 Q における曲線 $y = -\frac{1}{x}$ の接線を ℓ とし, 直線 ℓ と曲線 $y = \frac{1}{x}$ との交点を下の図のように S_1, S_2 とする。このとき, 以下の問いに答えなさい。



- (1) 2 点 S_1, S_2 の座標を t を用いて表しなさい。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{PS_1}$ と $\overrightarrow{PS_2}$ の内積を t を用いて表しなさい。
- (3) $\triangle S_1PS_2$ の面積を求め, t によらないことを確かめなさい。
- (4) $\angle S_1PS_2 = \theta$ とおく。このとき, $\cos \theta$ を t を用いて表しなさい。また, t が正の数全体を動くとき, $\cos \theta$ の最小値と, それを与える t の値を求めなさい。

(30 点)

右のページは白紙です。