

R 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしなさい。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から リ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、ナ などは既出の ナ を表す。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とするとき、それぞれの内積は、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。いま、辺 OA を $t:1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とし、辺 BC を $s:1-s$ ($0 < s < 1$) に内分する点を Q とする。ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{BC}$ が垂直になるのは $s = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときである。このとき、線分 PQ を 3:2 に内分する点を R とすると、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} t \vec{a} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}} \vec{b} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}} \boxed{\text{シ}}} \vec{c}$$

であり、

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{20} \left(\boxed{\text{ス}} t^2 + \boxed{\text{セ}} t - \boxed{\text{ソ}} \right)$$

となる。よって $t = \frac{-\boxed{\text{タ}} + \sqrt{\boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき、 $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直になる。

右のページは白紙です。

(2) 行列 X, A, E を

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める。また、一般に行列 $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対し、 $T(M) = p + s$ とおく。例えば、 $T(X) = a + d$, $T(A) = -9$, $T(E) = 2$ である。

上の A に対し、 $X^3 = A$ となる X について考える。以下、 X は

$$ad - bc = 4$$

を満たすものとする。 $t = T(X)$ とおくと、

$$X^2 = tX - \boxed{\text{ト}} E$$

であるので、

$$X^3 = (t^2 - \boxed{\text{ナ}})X - \boxed{\text{ニ}} tE$$

が成り立つ。 $X^3 = A$ であることから

$$T(A) = T(X^3) = (t^2 - \boxed{\text{ナ}}) T(X) - \boxed{\text{ニ}} tT(E)$$

となるので、

$$t^3 - \boxed{\text{ヌ}} t = -\boxed{\text{ノ}}$$

である。これを解くと、 $t = \boxed{\text{ハ}}$, $\frac{-\boxed{\text{ヒ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}}}{2}$ となる。

特に $t = \boxed{\text{ハ}}$ のときは

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ホ}} & -\boxed{\text{マ}} \\ \boxed{\text{ミ}} & \boxed{\text{ム}} \end{pmatrix}$$

である。

右のページは白紙です。

(3) 関数 $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x^2+8}+x}$ に対し、 $g(x) = f(x) - f(-x)$ とおく。このとき、

$$\{f(x)\}^3 - \{f(-x)\}^3 = \boxed{\times} x$$

$$f(x)f(-x) = \boxed{\text{モ}}$$

となる。これより

$$\{g(x)\}^3 = -\boxed{\text{ヤ}} g(x) + \boxed{\text{ユ}} x$$

が成り立つ。特に $x = 10$ とすると、 $g(10) = \boxed{\text{ヨ}}$ となる。

また、

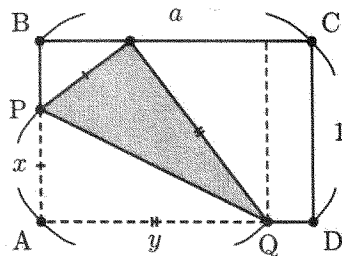
$$h(x) = \frac{x}{18} - \log f(x)$$

とすると、 $h(x)$ は $x = \boxed{\text{ラ}} \sqrt{\boxed{\text{リ}}}$ において極小値をとる。ただし、対数は自然対数である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙 **2** に記入しなさい。

- 2** 図のような長方形の紙 ABCD がある。辺 AB の長さを 1, 辺 AD の長さを a として, $a > 1$ を満たすものとする。辺 AB 上の点 P と辺 AD 上の点 Q をとり 線分 PQ で紙を折って頂点 A が辺 BC 上に乗るようにする。このとき $AP = x$, $AQ = y$ とおき, 以下の問いに答えなさい。



- (1) y と 線分 PQ の長さを, それぞれ x を用いて表しなさい。
- (2) x のとり得る値の範囲は $b \leq x \leq 1$ である。 b を求めなさい。
- (3) x が (2) で求めた範囲を動くとき, 線分 PQ の長さが最小となる点 P, Q を考える。このときの点 Q が点 D と異なるための a の条件を求めなさい。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 3 の解答はクリーム色の解答用紙 3 に記入しなさい。

3 関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ を考える。ここで、 e は自然対数の底である。 xy 平面において、 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を A_k とおく。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 定数 a, b に対して、

$$g(x) = e^{-x}(a \sin x + b \cos x)$$

とするとき、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ に対して $g'(x) = f(x)$ が成り立つように a, b を定めなさい。

(2) $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し A_{k+1} を A_k を用いて表しなさい。

(3) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ の和を求めなさい。

(4) xy 平面において、自然数 n に対し、 $0 \leq x \leq n\pi$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_n とおく。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めなさい。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。