

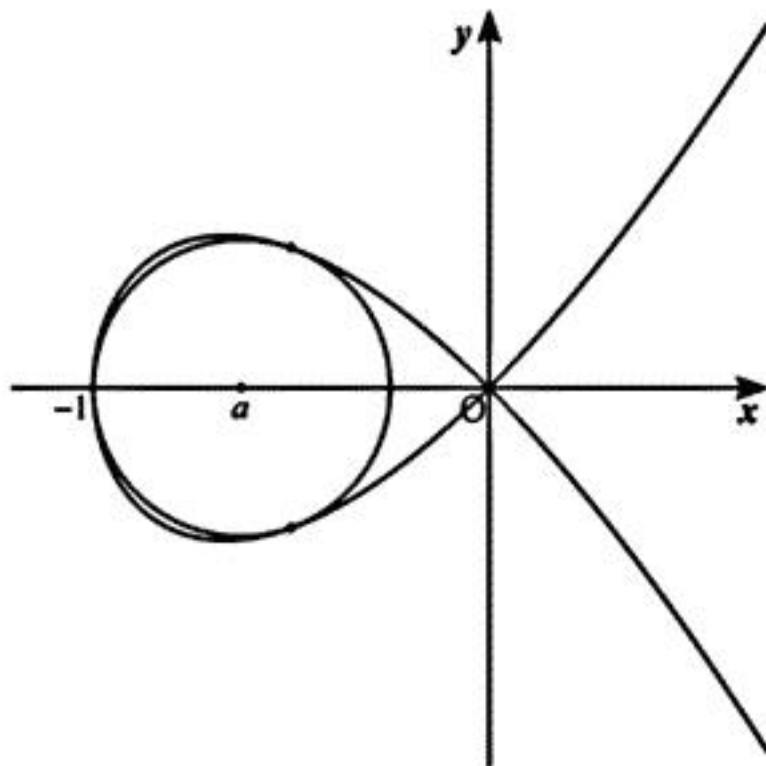
1

ア	5	イ	8	ウ	3	エ	8	オ	6	カ	3	キ	9
ク	0	ケ	3	コ	6	サ	1	シ	8	ス	5	セ	2
ソ	3	タ	0	チ	3	ツ	2	テ	1	ト	0	ナ	1
ニ	1	ヌ	3	ネ	3	ノ	8	ハ	4	ヒ	2	フ	4

【解説】

(1)

円 D は中心 $(a, 0)$ 、半径 r で、 $(-1, 0)$ において曲線 C を共有し、他にも曲線 C と 2 つ共有点を持つので、次図のようになる。



よって a は r を用いて

$$a = -1 + r$$

と表される。このとき円 D の式は

$$(x - r + 1)^2 + y^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = r^2 - (x - r + 1)^2$$

と表されるので、これを $y^2 = x^2(x + 1)$ に代入すると、

$$r^2 - (x - r + 1)^2 = x^2(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + x - 2r + 1) = 0$$

となる。ここで、前図より、共有点が 3 つになるためには $x^2 + x - 2r + 1 = 0$ が $x = -1, 0$ 以外に 1 つだけ解を持てば良いことが分かる。

$$x^2 + x - 2r + 1 = 0 \text{ かつ } x \neq -1, 0$$

$$\Leftrightarrow r \neq \frac{1}{2}$$

であることに注意して、 $x^2 + x - 2r + 1 = 0$ について、

$$(\text{判別式}) = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2r + 1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{3}{8} \quad (\text{これは } r \neq \frac{1}{2} \text{ を満たす})$$

このとき、

$$a = -1 + r = -\frac{5}{8}$$

となる。

(2)

(a)

$$(\text{左辺}) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 18 = x^2 - 2(y + 3) + 2y^2 + 18$$

ここで x は実数解を持つので、

$$(\text{判別式}) = (y + 3)^2 - 2y^2 - 18 = -(y - 3)^2 \geq 0$$

が成り立つ。 y は実数であるから

$$y = 3$$

このとき、与方程式から

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0$$

$$\therefore x = 6$$

となる。

(b)

$$kl + k - 2l - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k - 2)(l + 1) = 7$$

よって、

$$(k - 2, l + 1) = (7, 1), (1, 7), (-1, -7), (-7, -1)$$

$$\therefore (k, l) = (9, 0), (3, 6), (1, -8), (-5, -2)$$

また、

$$kl + k - 2l - 9 = 0$$

に $k = m + 2n, l = 2m - n$ を代入すると

$$(m + 2n)(2m - n) - 3m + 4n - 9 = 0$$

に一致するので、

$$(m + 2n, 2m - n) = (9, 0), (3, 6), (1, -8), (-5, -2)$$

となる。よって、 $m = \frac{1}{5}(k + 2l), n = \frac{1}{5}(2k - l)$ であると、 m, n は整数であることから、

$$(m, n) = (3, 0), (-3, 2)$$

である。

(3)

点 B を z 方向に 1 だけ移動した点を B' とおくと、線分 AB' 上に点 P があるとき、 $AP + PQ + QB$ は最小となる。

$A(2, 1, 2), B'(-1, -2, -1)$ 、点 P は $z = 1$ 上の点なので、点 P は線分 AB' を 1:2 に内分した点だと分かる。よって、

$$P(1, 0, 1)$$

このとき、 $AP + PQ + QB$ の値は

$$AP + PQ + QB = 1 + AB' = 1 + 3\sqrt{3}$$

となる。

(4)

$X = \log_2 x, Y = \log_2 y$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} \log_2 x & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\log_2 y & \log_2 \frac{x^2}{y^3} \\ \log_2 xy & 2\log_4 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2XY - 2X - 2Y & 2X^2 - 3XY - 2Y \\ 2X + 4Y & 2X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。各成分を比較して、連立して解くと、

$$X = 3, Y = 2, \alpha = 2, \beta = -4$$

このとき

$$x = 8, y = 4$$

2

(1)

$P(-t, t^2), Q(t, t^2)$ より、線分 PQ を直径とする円は中心 $(0, t^2)$ 、半径 t となるから、

$$x^2 + (y - t^2)^2 = t^2$$

(答) $x^2 + (y - t^2)^2 = t^2$

(2)

放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数は、放物線 C_1 の頂点が円の内部にあるとき 2 個、円周上にあるとき 3 個、円の外部にあるとき 4 個なので、円周上の点 $(0, t^2 - t)$ の y 座標の符号を調べれば良い。

$$t^2 - t = t(t - 1) \begin{cases} < 0 & (0 < t < 1) \\ = 0 & (t = 1) \\ > 0 & (t > 1) \end{cases}$$

であるから、放物線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数は、 $0 < t < 1$ のとき 2 個、 $t = 1$ のとき 3 個、 $t > 1$ のとき 4 個である。

(答) $0 < t < 1$ のとき 2 個、 $t = 1$ のとき 3 個、 $t > 1$ のとき 4 個

(3)

(2) の過程より、 $0 < t < 1$ のとき放物線の頂点は円の内部にあるので、

$$\begin{aligned} \square(t) &= \frac{\pi t^2}{2} - 2t \cdot t^2 + 2 \int_0^t x^2 dx \\ &= -\frac{4}{3}t^3 + \frac{\pi}{2}t^2 \end{aligned}$$

(答) $-\frac{4}{3}t^3 + \frac{\pi}{2}t^2$

(4)

(3) で求めた $\square(t)$ を t で微分すると、

$$\square'(t) = -t(4t - \pi)$$

となる。したがって $0 < t < 1$ の範囲での増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

よって、 $t = \frac{\pi}{4}$ のとき、最大値

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^3}{96}$$

をとる。

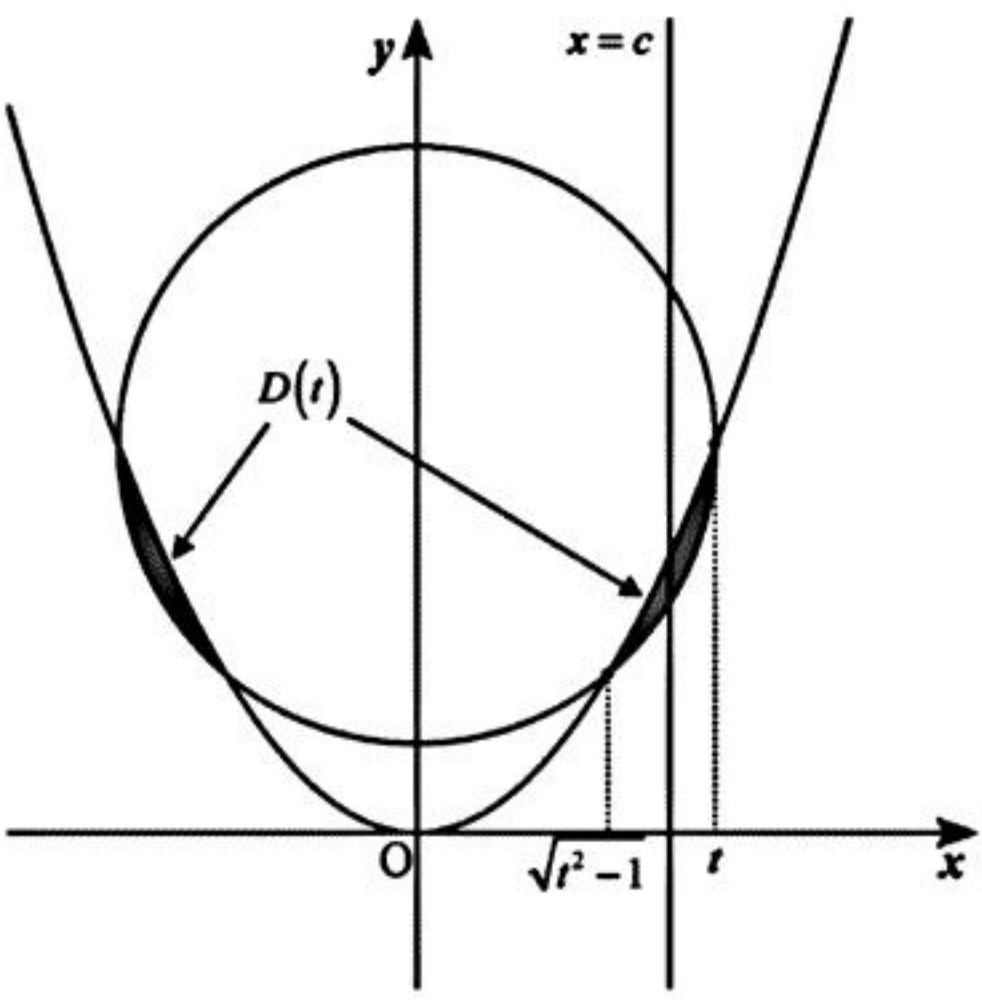
(答) $\frac{\pi^3}{96}$

(5)

放物線 C_1 の式と円の式 C_2 から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (x^2 - t^2)^2 &= t^2 \\ x^2 - t^2 + (x^2 - t^2)^2 &= 0 \\ (x^2 - t^2)(x^2 - t^2 + 1) &= 0 \\ \therefore x = \sqrt{t^2 - 1}, t \quad (&\because 1 < t) \end{aligned}$$

よって、グラフは次のようになる。



グラフより、 $\alpha(t) = \sqrt{t^2 - 1}, \beta(t) = t$ とすれば良い。

(答) $\alpha(t) = \sqrt{t^2 - 1}, \beta(t) = t$

また、円 C_2 の式を y について解くと

$$y = t^2 \pm \sqrt{t^2 - x^2}$$

となるので、交わりとなる線分の長さ L は

$$L = c^2 - (t^2 - \sqrt{t^2 - c^2}) = -z + \sqrt{z} \quad (\text{ただし、} z = t^2 - c^2 \text{ で、} 0 \leq z \leq 1)$$

と表せる。 L を z で微分すると、

$$\frac{dL}{dz} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

となる。 $-1 + \frac{1}{2\sqrt{z}} = 0$ を解くと $z = \frac{1}{4}$ なので、増減表は次のようになる。

z	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1
$\frac{dL}{dz}$		+	0	-	
L		↗		↘	

したがって $z = \frac{1}{4}$ のとき L は最大となるので、

$$L \leq -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

以上より直線 $x = c$ と領域 $D(t)$ の交わりとなる線分の長さは $\frac{1}{4}$ 以下となることが示された。

(証明終)

(6)

$t(\beta(t) - \alpha(t))$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \{t(\beta(t) - \alpha(t))\}' &= (t^2 - t\sqrt{t^2 - 1})' \\ &= 2t - \frac{2t^2 - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} \\ &= \frac{2t\sqrt{t^2 - 1} - 2t^2 - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{aligned}$$

よって、 $(2t\sqrt{t^2 - 1})^2 - (2t^2 - 1)^2 = -1 < 0$ より、 $\{t(\beta(t) - \alpha(t))\}' < 0$ である。

ゆえに、 $t(\beta(t) - \alpha(t))$ は t に関して単調減少する。

よって、(5) より

$$S(t) \leq 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\beta(t) - \alpha(t)) = \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{2}$$

なので、

$$tS(t) \leq \frac{t(\beta(t) - \alpha(t))}{2} \leq \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(\beta(t) - \alpha(t))}{2} = \frac{1 \cdot (1 - 0)}{2} \leq \frac{1}{2}$$

(証明終)

3

(1)

$$C: y = x^3 - 2x - 2$$

において,

$$y' = 3x^2 - 2$$

であるから, t を実数として点 $(t, t^3 - 2t - 2)$ で曲線 C と接する接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 2)(x - t) + t^3 - 2t - 2 \\ &= (3t^2 - 2)x - 2t^3 - 2 \end{aligned}$$

と表せる。これが点 $(2, a)$ を通るとすると,

$$\begin{aligned} a &= (3t^2 - 2) \cdot 2 - 2t^3 - 2 \\ &= -2t^3 + 6t^2 - 6 \end{aligned}$$

この方程式を満たすような実数 t の個数が, 点 $(2, a)$ から引ける曲線 C の接線の本数に対応

している。ここで,

$$f(t) = -2t^3 + 6t^2 - 6$$

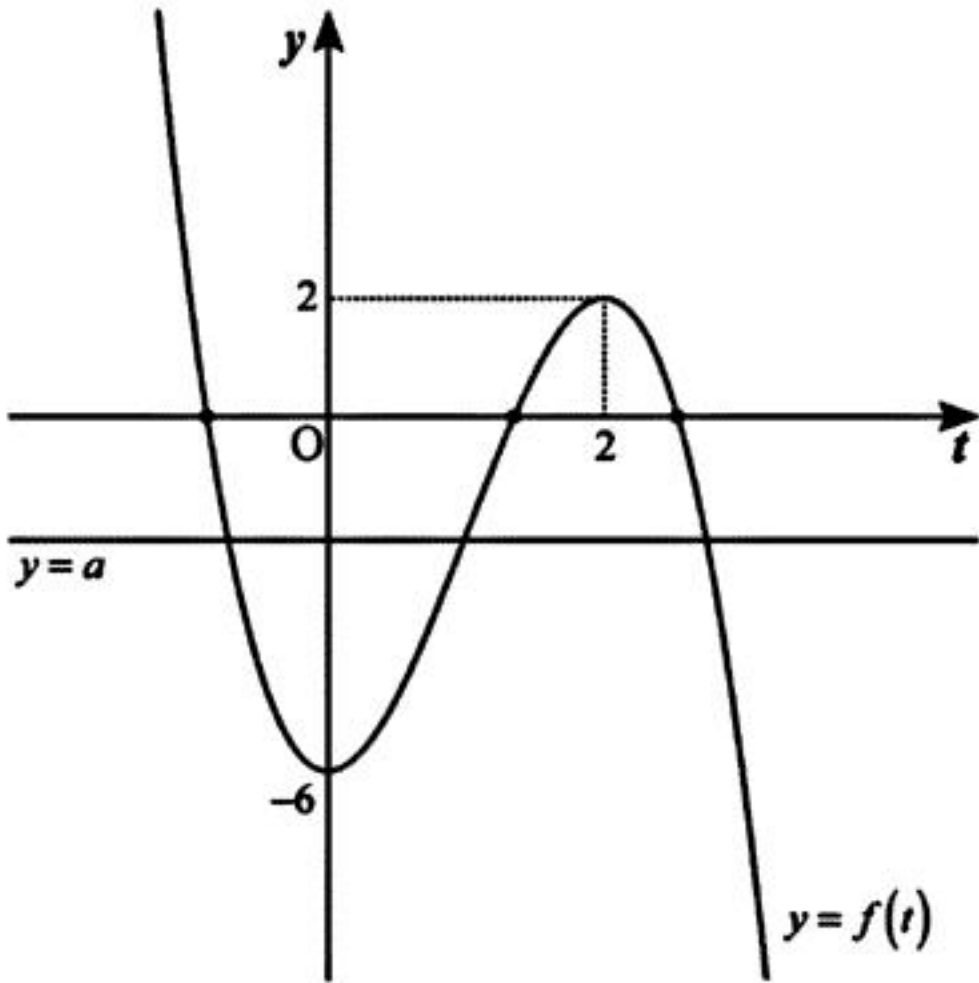
とおくと,

$$f'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t - 2)$$

となるので, $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	0	...	2	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	$f(0) = -6$	↗	$f(2) = 2$	↘

したがって, $y = f(t)$ と $y = a$ のグラフは次のようになる。



$y = f(t)$ と $y = a$ の共有点の個数が点 $(2, a)$ から引ける曲線 C の接線の本数に対応している

ので, 求める本数は

1本 ($a < -6, 2 < a$ のとき)

2本 ($a = -6, 2$ のとき)

3本 ($-6 < a < 2$ のとき)

である。

(答) 1本 ($a < -6, 2 < a$ のとき)

2本 ($a = -6, 2$ のとき)

3本 ($-6 < a < 2$ のとき)

(2)

(a)

n 回中 k 回, 4 以下の目が出る確率なので,

$$p_n(k) = {}_n C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \frac{{}_n C_k \cdot 2^k}{3^n}$$

$$(答) \frac{{}_n C_k \cdot 2^k}{3^n}$$

(b)

[1] $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} E_n &= 3(p_n(0) + p_n(1)) \\ &= 3\left(\frac{{}_1 C_0 \cdot 2^0}{3^1} + \frac{{}_1 C_1 \cdot 2^1}{3^1}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

[2] $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} E_n &= 2p_n(2) + 3(p_n(0) + p_n(1)) \\ &= 2 \cdot \frac{{}_2 C_2 \cdot 2^2}{3^2} + 3\left(\frac{{}_2 C_0 \cdot 2^0}{3^2} + \frac{{}_2 C_1 \cdot 2^1}{3^2}\right) \\ &= \frac{23}{9} \end{aligned}$$

[3] $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=3}^n p_n(k) + 2p_n(2) + 3(p_n(0) + p_n(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n p_n(k) + p_n(2) + 2(p_n(0) + p_n(1)) \\ &= 1 + \frac{2}{3^n}(n^2 + n + 1) \quad \left(\because \sum_{k=1}^n p_n(k) = 1\right) \end{aligned}$$

以上[1], [2], [3]を合わせると, 全ての自然数 n に対して

$$E_n = 1 + \frac{2}{3^n}(n^2 + n + 1)$$

となる。

$$(答) E_n = 1 + \frac{2}{3^n}(n^2 + n + 1)$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{2}{3^n}(n^2 + n + 1) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{n^2}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right\} \\ &= 1 \quad \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0 \right) \end{aligned}$$

(答) 1