

1

(1)

$$(a) \quad b = -\frac{1}{\sqrt[3]{a}}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

$$(b) \quad a = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

$$(c) \quad \frac{256}{27}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(2)

$$(a) \quad r^2 = \frac{2 \sin 2\theta}{2 - \sin^2 2\theta}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

$$(b) \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(3)

$$(a) \quad {}_{n+1}C_{l+1}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

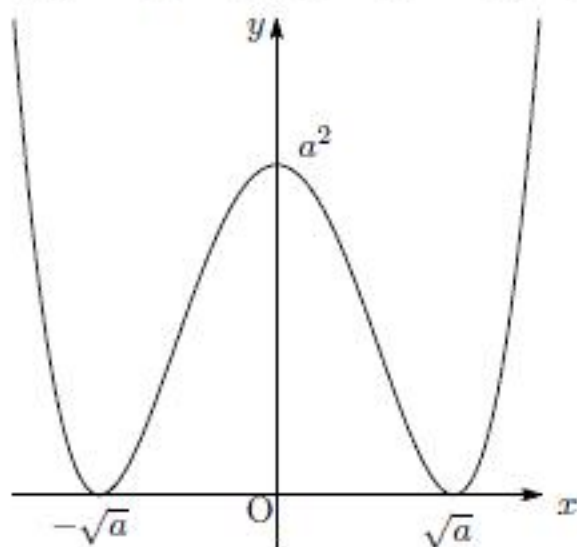
$$(b) \quad {}_{n+1}C_l. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

(4)

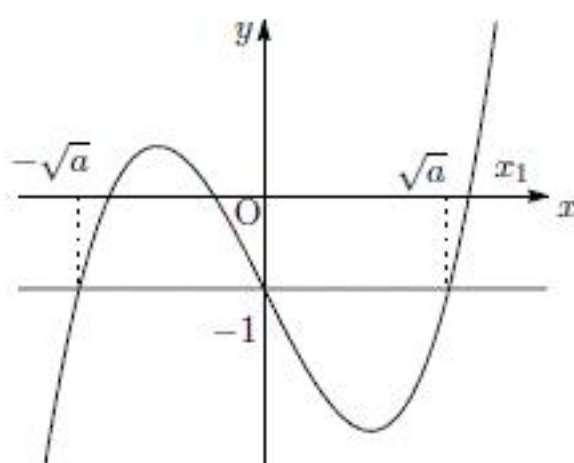
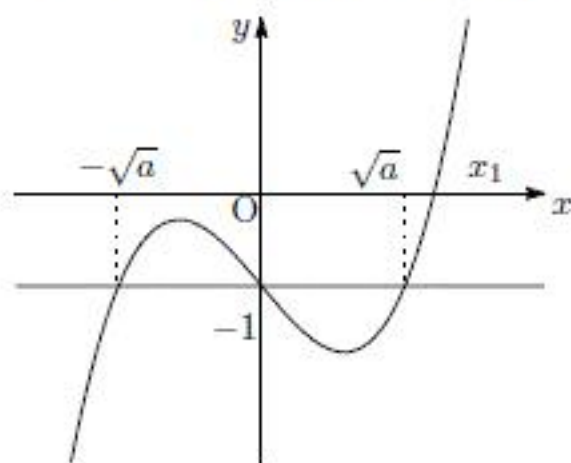
$$(a) \quad \frac{1}{4}. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

$$(b) \quad \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi. \quad \cdots \quad \text{[答]}$$

2

(1) $y = f(x) = (x^2 - a)^2$ のグラフは以下の通り.

… [答]

(2) $y = g'(x) = 4x(x^2 - a) - 1$ のグラフは以下の通り.

… [答]

(3)

 $h(x) = f(x) - \{x - x_0 + f(x_0)\}$ とおくと, $h'(x) = f'(x) - 1 = 4x(x^2 - a) - 1$ である. 増減表は次のようになる.

x	$-\infty$	$\cdots$		$\cdots$	x_0	$\cdots$		$\cdots$	$\sqrt{a}$		$\cdots$	∞
$h'(x)$		$-$		$+$	$+$	$+$		$-$	-1		$+$	
$h(x)$	∞	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\sqrt{a} + x_0 - f(x_0)$		$\nearrow$	∞

 $h(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} + x_0 - (x_0^2 - a)^2 < 0$ である.また, 十分小さい正の数 ϵ に対して $h(x_0 + \epsilon) > 0$. $h(x)$ は連続関数なので, 中間値の定理より, $x_0 < x < \sqrt{a}$ に $h(x) = 0$ は解を持つ. (証明終わり)

(4)

 x 座標が定まれば, y 座標も定まることから, 異なる共有点の x 座標は異なる.したがって, 共有点の個数は x 座標の個数を数えればよい.共有点の x 座標は $g(x) = (x^2 - a)^2 + b - x = 0$ の実数解であることに注意する.(ア) $-\sqrt{a} < x < 0$ での $f'(x)$ の最大値が 1 を超えるとき.(3) の増減表より, $h(x) = 0$ は異なる実数解を 4 つもつ.したがって, $b = x_0 - f(x_0)$ とおくと, $g(x) = 0$ は異なる実数解を 4 つもつので, C と $C_{a,b}$ の共有点は 4 個となる.(イ) $-\sqrt{a} < x < 0$ での $f'(x)$ の最大値が 1 未満のとき. $f'(x) = 4x(x^2 - a)$, $f''(x) = 12x^2 - 4a$ なので, $f'(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$

 $\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}} < 1$ のとき, $g'(x) = f'(x) - 1 = 4x(x^2 - a) - 1 = 0$ の実数解は唯一なので, $g(x) = f(x) + b - x$ は下がって上がるだけの関数となり, $g(x) = 0$ の解は 2 個以下となる.よって, C と $C_{a,b}$ の共有点は 2 個以下. $\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}} = 1$ を解いて, $A = \frac{3}{4}$. … [答]