

1

【解答】

- (1) (a) ア 7 イ 1  
 (b) ウ 1 エ 5 オ 9  
 (c) カ 2 キ 1 ク 1  
 (2) ケ 3 コ 3 サ 4 シ 4 ス 1 セ 1  
 (3) ソ 3 タ 7 チ 6 ツ 9 テ 0

【解説】

(1)

(a)

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} A^2 &= (5+2)A - (5 \cdot 2 - 3 \cdot 3)E \\ &= 7A - E \end{aligned}$$

である。

(b)

$(A - sE)^2 = tA$  を満たすとき, (a) の結果を用いて

$$\begin{aligned} A^2 - 2sA + s^2E &= tA \\ \Leftrightarrow (7A - E) - 2sA + s^2E &= tA \\ \Leftrightarrow (2s + t - 7)A &= (s^2 - 1)E \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A$  は  $E$  の実数倍で表されないことから

$$\begin{cases} 2s + t - 7 = 0 \\ s^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (s, t) = (1, 5), (-1, 9)$$

である。

(c)

$(A - sE)^2 = tA$  が成り立つとき, (b) の結果より  $t > 0$  であるから

$$\left( \pm \frac{A - sE}{\sqrt{t}} \right)^2 = A$$

となる。よって、 $\begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} = A$  が成り立つとき

$$\begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} = \pm \frac{A - sE}{\sqrt{t}}$$

である。

[1]  $(s, t) = (1, 5)$  のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} &= \pm \frac{A - 1 \cdot E}{\sqrt{5}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、このとき  $p \geq 0, pq - r^2 \geq 0$  を満たす  $p, q, r$  の組は存在しない。

[2]  $(s, t) = (-1, 9)$  のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} &= \pm \frac{A - (-1) \cdot E}{\sqrt{9}} \\ &= \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、このとき  $p \geq 0, pq - r^2 \geq 0$  を満たす  $p, q, r$  の組は

$$(p, q, r) = (2, 1, 1)$$

が存在する。

以上, [1], [2] より、求める  $p, q, r$  の組は

$$(p, q, r) = (2, 1, 1)$$

である。

(2)

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$  なる  $\alpha$  を用いて

$$\begin{aligned} a \cos x - \sin x &= \sqrt{a^2 + 1} \cos(x + \alpha) \\ S(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a \cos x - \sin x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sqrt{a^2 + 1} \cos(x + \alpha) \right| dx \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha} \cos(x + \alpha) dx - \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + \alpha) dx \right\} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left\{ \int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \cos x dx \right\} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left\{ [\sin x]_a^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \right\} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left\{ 1 - \sin \alpha - \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 1 \right\} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} (2 - \sin \alpha - \cos \alpha) \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \\ &= 2\sqrt{a^2 + 1} - a - 1 \\ &= \sqrt{4a^2 + 4} - (a + 1) \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} S(\sqrt{3}) &= \sqrt{4(\sqrt{3})^2 + 4} - (\sqrt{3} + 1) \\ &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(3)

[1]  $7x + 6 \geq 9x$  かつ  $x > 0$ 、つまり  $0 < x \leq 3$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{9x}{7x + 6} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< \left( \frac{9x}{7x + 6} \right)^n \leq 1 \\ \Leftrightarrow 1 &< 1 + \left( \frac{9x}{7x + 6} \right)^n \leq 2 \\ \Leftrightarrow 1 &< \sqrt[n]{1 + \left( \frac{9x}{7x + 6} \right)^n} \leq \sqrt[2]{2} \end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + \left( \frac{9x}{7x + 6} \right)^n} = 1$$

である。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(7x + 6)^n + (9x)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (7x + 6) \sqrt[n]{1 + \left( \frac{9x}{7x + 6} \right)^n} \\ &= 7x + 6 \end{aligned}$$

となる。

[2]  $7x + 6 < 9x$  かつ  $x > 0$ 、つまり  $x > 3$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{7x + 6}{9x} < 1 \\ \Leftrightarrow 0 &< \left( \frac{7x + 6}{9x} \right)^n < 1 \\ \Leftrightarrow 1 &< \left( \frac{7x + 6}{9x} \right)^n + 1 < 2 \\ \Leftrightarrow 1 &< \sqrt[n]{\left( \frac{7x + 6}{9x} \right)^n + 1} < \sqrt[2]{2} \end{aligned}$$

となるから

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left( \frac{7x + 6}{9x} \right)^n + 1} = 1$$

である。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(7x + 6)^n + (9x)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 9x \sqrt[n]{\left( \frac{7x + 6}{9x} \right)^n + 1} \\ &= 9x \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より

$$f(x) = \begin{cases} 7x + 6 & (0 < x \leq 3) \\ 9x & (x > 3) \end{cases}$$

である。

## 2

(1)

[1]  $|x_n + y_n| \leq 2\sqrt{2}$  のとき

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= y_n - \frac{x_n + y_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}(y_n - x_n) \end{aligned}$$

となる。

[2]  $|x_n + y_n| > 2\sqrt{2}$  のとき

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} - x_n \\ &= \frac{1}{2}(y_n - x_n) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]より, すべての自然数  $n$  に対して

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

となるから, 数列  $\{y_n - x_n\}$  は初項  $y_1 - x_1 = 5$ , 公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であり

$$y_n - x_n = 5 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y_n - x_n = 5 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(2)

すべての自然数  $n$  に対して

$$x_n^2 \leq 2 < y_n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となることを, 数学的帰納法によって証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$$x_1^2 = 0, y_1^2 = 25$$

であるから  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

[2]  $n=k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) のとき  $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定するとき

[i]  $|x_k + y_k| \leq 2\sqrt{2}$  のとき

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= \left( \frac{x_k + y_k}{2} \right)^2 \\ &\leq \frac{(2\sqrt{2})^2}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1}^2 &= y_k^2 \\ &> 2 \end{aligned}$$

となり,  $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

[ii]  $|x_k + y_k| > 2\sqrt{2}$  のとき

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= x_k^2 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{k+1}^2 &= \left( \frac{x_k + y_k}{2} \right)^2 \\ &> \frac{(2\sqrt{2})^2}{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となり,  $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

以上, [i], [ii]より,  $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

以上, [1], [2]より, すべての自然数  $n$  に対して  $x_n^2 \leq 2 < y_n^2$  となることが示された。

(証明終)

(3)

$x_1, y_1$  はともに非負の実数であり,  $x_{n+1}, y_{n+1}$  は  $x_n, y_n$  と非負の実数の積を足し合わせたものであるから, 帰納的に考えて  $x_n, y_n$  は非負の実数である。よって, (2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} x_n^2 &\leq 2 < y_n^2 \\ \Leftrightarrow x_n &\leq \sqrt{2} < y_n \end{aligned}$$

となるから

$$0 \leq \sqrt{2} - x_n < y_n - x_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また, (1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①, ②よりはさみうちの原理から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - x_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。また, ②より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{aligned}$$

となるから, ③より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{2}$$

3

(1)  $\overrightarrow{CA}$  は  $\overrightarrow{CM} = (p, q)$  を角  $-s$  だけ回転したベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= \begin{pmatrix} \cos(-s) & -\sin(-s) \\ \sin(-s) & \cos(-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p \cos s + q \sin s \\ -p \sin s + q \cos s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\overrightarrow{CA} = (p \cos s + q \sin s, -p \sin s + q \cos s)$

(2) 円  $C_1$  上の中心角  $s$  の弧  $AM$  と円  $C_2$  上の中心角  $t$  の弧  $BM$  の長さが等しいことから

$$\begin{aligned}r \cdot s &= 1 \cdot t \\ \Leftrightarrow s &= \frac{t}{r}\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} \\ &= ((1-r) \cos t, (1-r) \sin t) + (r \cos(t-s), r \sin(t-s)) \\ &= \left( (1-r) \cos t + r \cos\left(t - \frac{t}{r}\right), (1-r) \sin t + r \sin\left(t - \frac{t}{r}\right) \right)\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\overrightarrow{OA} = \left( (1-r) \cos t + r \cos\left(t - \frac{t}{r}\right), (1-r) \sin t + r \sin\left(t - \frac{t}{r}\right) \right)$

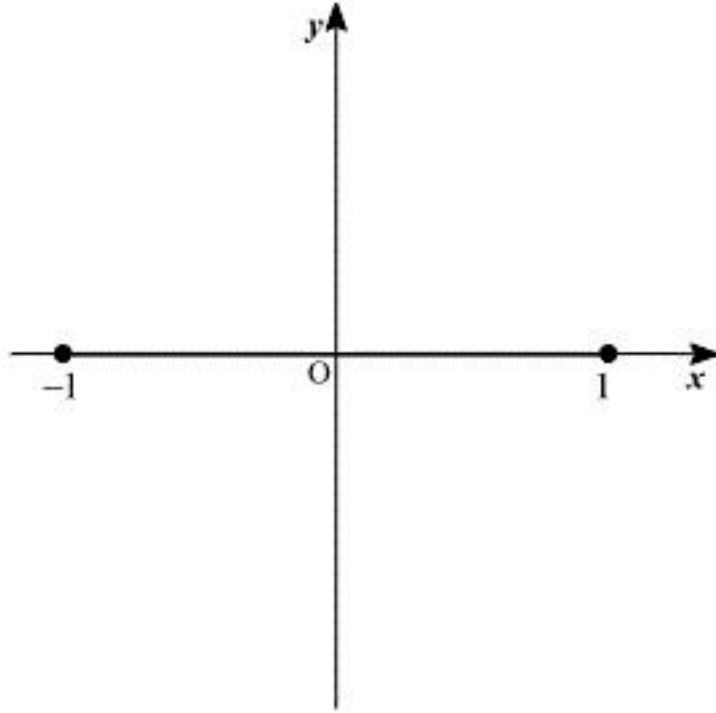
(3)  $r = \frac{1}{2}$  とするとき、(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cos t + \frac{1}{2} \cos(t - 2t), \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sin t + \frac{1}{2} \sin(t - 2t) \right) \\ &= (\cos t, 0)\end{aligned}$$

となるから、点  $A$  が点  $B$  の位置に初めて戻るのは、初めて  $\cos t = 1$  となるときであり  $t = 2\pi$  となる。よって、点  $A$  が  $0 \leq t \leq 2\pi$  において描く軌跡は

$$-1 \leq x \leq 1, y = 0$$

で表される線分となり、これを図示すると下図のようになる。



(答) 前図

(4)  $r = \frac{1}{4}$  とするとき、(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \left( \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cos t + \frac{1}{4} \cos(t - 4t), \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sin t + \frac{1}{4} \sin(t - 4t) \right) \\ &= \left( \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t \right) \\ &= (\cos^3 t, \sin^3 t)\end{aligned}$$

となるから、点  $A$  が点  $B$  の位置に初めて戻るのは、初めて

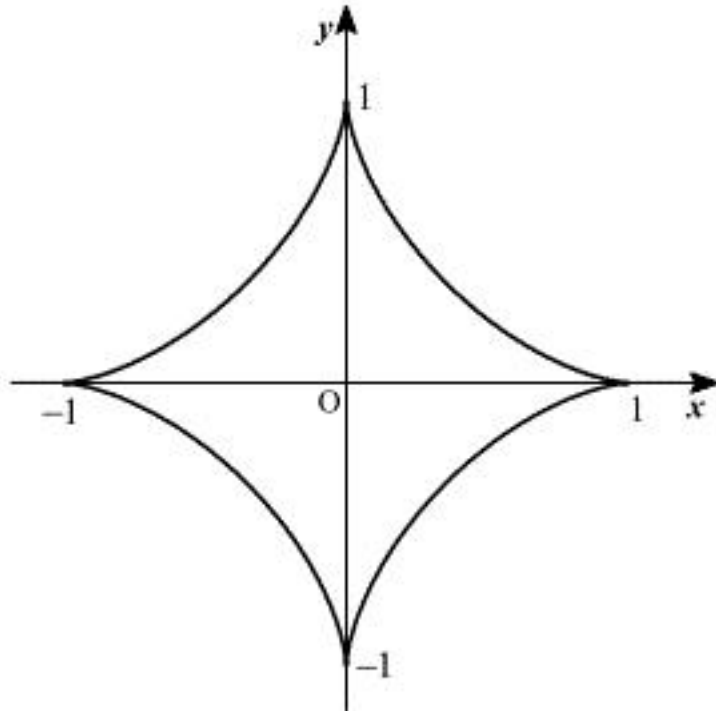
$$\cos^3 t = 1, \sin^3 t = 0$$

が同時に成り立つときであり  $t = 2\pi$  となる。さらに

$$\begin{aligned}\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t, \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t \\ \cos(t + \pi) &= -\cos t, \sin(t + \pi) = -\sin t \\ \cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) &= \sin t, \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos t\end{aligned}$$

であるから、点  $A$  が  $0 \leq t \leq 2\pi$  において描く軌跡は、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  において描く軌跡を原点中

心に  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  だけ回転させた軌跡を合わせたものとなる。よって、この軌跡の概形は下図のようになる。



この曲線で囲まれた図形の面積は、対称性を利用して

$$\begin{aligned}4 \int_0^1 y dx &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t \cdot (-3 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1 - \cos 4t}{2} - \sin^2 2t \left( \frac{1}{2} \sin 2t \right)' \right\} dt \\ &= \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{6} \sin^3 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{8} \pi\end{aligned}$$

となる。